Vedecká rada Fakulty elektrotechniky a informatiky
Slovenskej technickej univerzity v Bratislave

Ing. Ľubomír GRMAN

ANALÝZA STABILITY A SYNTÉZA ROBUSTNÝCH REGULÁTOROV PRE LINEÁRNE SYSTÉMY

Autoreferát dizertačnej práce

Na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia: 38-01-9 Automatizácia a riadenie

Bratislava, máj 2005

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Katedre automatizovaných systémov riadenia, Fakulty elektrotechniky a informatiky, Slovenskej technickej univerzity v Bratislave.

Predkladateľ: **Ing. Ľubomír GRMAN**
Katedra automatizovaných systémov riadenia,
Fakulta elektrotechniky a informatiky, STU
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

Školiteľ: **Prof. Ing. Vojtech Veselý, DrSc.**
Katedra automatizovaných systémov riadenia,
Fakulta elektrotechniky a informatiky, STU
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

Oponenti: ....
....
....

....
....
....

....
....
....

Autoreferát bol rozoslaný dňa ....

Obhajoba dizertačnej práce sa koná ....
pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v odbore doktorandského štúdia, vymenovanou predsedom spoločnej odborovej komisie dňa ....

číslo odboru : 38-01-9, odbor doktorandského štúdia: Automatizácia a riadenie

na Katedre automatizovaných systémov riadenia, Fakulty elektrotechniky a informatiky, Slovenskej technickej univerzity, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava.

Predseda spoločnej odborovej komisie:
Prof. Ing. Ladislav Jurišica, PhD.
Katedra automatizácie a regulácie, STU
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

OBSAH

Zoznam použitých symbolov a skratiek

Prenosové funkcie

$G(s)$	regulovaný systém

Polynómy a vektory

${}^{i}K(s)$	Charitonovov polynóm
$\mathbf{K}_i(s)$	vektor Charitonovových polynómov
$P_V(s)$	polynóm umiestnený vo vrchole kvádra neurčitostí
$\mathbf{u}(t)$	vektor riadiacich veličín
$\mathbf{x}(t)$	vektor stavových veličín
$\mathbf{y}(t)$	vektor výstupných veličín

Matice

$\mathbf{A}$	matica systému
$\mathbf{A}_c$	matica uzavretého regulačného obvodu
$\mathbf{A}_{vi}, \mathbf{B}_{vi}$	matice umiestnené vo vrcholoch kvádra neurčitostí
$\mathbf{B}$	matica vstupov
$\mathbf{C}$	matica výstupov
$\mathbf{F}$	spätnoväzobná matica od výstupu
$\mathbf{I}$	jednotková matica
$\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})$	parametricky závislá Ljapunovova matica
$\boldsymbol{\delta}\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{B}$	matice neurčitostí

Množiny a priestory

$\mathbf{G}_E(s)$	hraničné prenosové funkcie
$\mathbf{G}_K(s)$	Charitonovove prenosové funkcie
$\mathbf{G}_P(s)$	hraničné polytopické prenosové funkcie

$\mathbf{G}_V(s)$	prenosové funkcie polytopického systému
$\mathbf{M}_E(s)$	multilineárne hraničné prenosové funkcie
$\mathbf{M}_P(s)$	multilineárne hraničné polytopické prenosové funkcie
$\mathbf{S}_i(s)$	Charitonovove segmenty

Premenné, koeficienty a signály

N	počet vrcholov polytopu
q	koeficient neurčitostí
q_{abs}	absolútna hodnota koeficientu neurčitostí
q_m	aritmetický priemer maximálnych hodnôt koeficientov neurčitostí
q_{max}	maximálna hodnota koeficientov neurčitostí
p	počet neurčitostí
s	Laplaceov operátor

Skratky

LMI	lineárna maticová nerovnosť
MIMO systém	mnohorozmerný systém (viac vstupov – viac výstupov)
PDLM	parametricky závislá Ljapunovova matica
SISO systém	jednorozmerný systém (jeden vstup – jeden výstup)
URO	uzavretý regulačný obvod

1 Úvod

V súčasnosti sa automatická regulácia uplatňuje už takmer vo všetkých oblastiach hospodárskeho a každodenného života. Zavádza sa za účelom mnohonásobného zvýšenia produktivity práce, kvality technologických a výrobných procesov, a tým aj kvality vyrábaných výrobkov. Dôsledkom týchto prínosov je veľký záujem spoločnosti o automatické riadenie, ktoré je spravidla investíciou s veľmi rýchlou návratnosťou. Jednu z najvýznamnejších a najzaujímavejších častí automatického riadenia tvorí riadenie technologických procesov.

Klasické metódy návrhu regulátorov vychádzajú z matematického modelu regulovaného procesu. Získať ho úplne presne v praxi nie je možné, pretože každý model fyzikálneho systému opisuje skutočnú dynamiku vždy iba približne. Všeobecne navrhované a analyzované systémy riadenia používajúce model systému preto musia vo výslednom návrhu zohľadňovať nejaké neurčitosti modelu. Spôsob opisu neurčitostí závisí od objemu informácií o ich fyzikálnej podstate, štruktúre a schopnosti projektanta vyjadriť mechanizmus ich činnosti.

V praxi je potrebné navrhnúť taký riadiaci systém, ktorý zabezpečí stabilitu a dostatočnú kvalitu riadenia aj v nepriaznivých podmienkach. Ak systém automatického riadenia má schopnosť zachovať stabilitu pre všetky predpokladané a v určitom intervale ohraničené zmeny parametrov alebo pre určitou normou ohraničenú dynamickú neurčitosť, potom ho nazývame *robustným* z hľadiska stability.

Dizertačná práca je rozčlenená do siedmich kapitol, vrátane úvodu a záveru. V druhej kapitole uvádzame problematiku a historický prehľad robustného riadenia dynamických systémov vo frekvenčnej a v časovej oblasti. V tretej kapitole sú formulované ciele práce. Kľúčovou kapitolou práce je štvrtá a piata kapitola. Štvrtá kapitola sa zaoberá analýzou stability lineárnych časovo-invariantných neurčitých SISO systémov vo frekvenčnej oblasti a MIMO systémov v časovej oblasti. Nájdeme tu tiež formulované základné modely neurčitého systému a niekoľko metód analýzy robustnej stability neurčitých systémov založené na tzv. hraničných prenosových funkciách. V tejto oblasti sú pôvodnými výsledkami hraničná prenosová funkcia pre afinné systémy a dva druhy hraničných prenosových funkcií pre multilineány-polytopický systém. V prípade MIMO systémov je uvedených niekoľko príkladov spolu s vyhodnotením konzervativizmu jednotlivých metód analýzy robustnej stability. V piatej kapitole uvádzame na niekoľkých príkladoch aplikovanie klasických metód lineárnej teórie riadenia pre návrh robustného regulátora SISO systémov s využitím rôznych hraničných prenosových funkcií. Ďalej sú uvedené pre MIMO systémy v časovej oblasti metódy syntézy robustného regulátora zabezpečujúce kvalitu regulácie a kvadratickú stabilitu resp. kvadratickú stabilitu s PDLM. Pôvodným výsledkom je úprava Peaucellovej metódy analýzy stability na metódu syntézy regulátora so zabezpečením kvality regulácie. Za účelom prevodu nekonvexného problému na konvexný sú zavedené konvexifikačné funkcie, ktoré využívame aj na výpočet počiatočných podmienok v LMI algoritmoch. V tejto oblasti sú pôvodným výsledkom štyri rôzne algoritmy na výpočet počiatočných podmienok pre tri metódy syntézy robustného regulátora. Konzervativizmus jednotlivých metód syntézy regulátora je vyhodnocovaný v niekoľkých príkladoch na náhodne vygenerovanej vzorke matíc. Prínosy a výsledky dizertácie sú zhrnuté v šiestej kapitole.

2 Problematika robustného riadenia dynamických systémov

Teórii robustného riadenia dynamických systémov sa začala venovať pozornosť od konca 70-tych rokov a od polovice 80-tých rokov nastal prudký rozvoj metód analýzy robustných vlastností reálnych objektov a syntézy robustných regulátorov.

Výrazným prelomom v teórii robustného riadenia vo frekvenčnej oblasti pri parametrických neurčitostiach bolo objavenie *Charitonovovej vety* [11] v roku 1978 a tzv. *Vety o stabilite na hrane kvádra neurčitostí* (*Edge Theorem*), ktorej autormi sú Barlett, Hollot a Lin [3]. Dokázali, že celá množina polynómov je stabilná vtedy a len vtedy, ak je stabilná na všetkých hranách kvádra neurčitostí. V r. 1989 Chapellat a Bhattacharyya [9] zaviedli *Zovšeobecnenú Charitonovovu vetu*, ktorá dáva nutné a postačujúce podmienky robustnej stability uzavretého regulačného obvodu obsahujúceho intervalový systém v priamej vetve. V prípade multilineárnej závislosti koeficientov na množine neurčitých parametrov je dôležitým nástrojom veta, ktorá je označovaná v literatúre ako „*Mapping Theorem*" opísaná autormi Zadeh a Desoer [20].

V rozvoji metód robustného riadenia lineárnych a nelineárnych dynamických systémov, ktoré sú opísané v časovej oblasti t.j. stavovými rovnicami s neurčitosťami, významnou mierou prispelo riešenie lineárnych maticových nerovníc (LMI) [6]. Základom formulácie problémov riadenia prostredníctvom lineárnych maticových nerovníc je teória A. M. Ljapunova, ktorá bola spracovaná už na prelome 19. a 20. storočia a v literatúre je známa pod názvom *Ljapunovova teória stability*. Jednou z výhod LMI v teórii systémov riadenia je, že LMI problém sa môže formulovať ako konvexný optimalizačný problém, ktorý zodpovedá výpočtovému riešeniu. Dôležitým prínosom LMI je, že je možné spoľahlivo riešiť veľa LMI, pre ktoré sa nenašlo žiadne „analytické riešenie" [14].

S vývojom LMI návrhu riadenia sa začalo navrhovať robustné riadenie s robustnosťou neurčitého polytopického systému opísaného v stavovom priestore. Tieto regulátory boli konzervatívne, pretože afinné LMI podmienky sa použili na tzv. *kvadratickú stabilitu*, t.j. uzavretý obvod je stabilný v celom polytope pre jednoduchú Ljapunovovu maticu [6]. Toto obmedzenie nie je nutné pre stabilitu, je nutné iba pre riešiteľnosť algoritmu návrhu riadenia cez LMI. Nevýhodou kvadratickej stability z hľadiska prísnosti podmienok je, že zabezpečuje stabilitu pre ľubovoľne rýchlu zmenu parametrov, preto je použitá jednoduchá Ljapunovova funkcia pre testovanie stability cez celý kváder neurčitostí [6]. Redukovanie konzervativizmu kvadratickej stability v analýze robustnej stability polytopických systémov viedlo k zavedeniu tzv. *parametricky závislej Ljapunovovej funkcie*, napr. [7], [8], [13], [17], [18] v spojitej oblasti a napr. [12], [15] v diskrétnej oblasti.

Nelineárne konvexné nerovnosti môžu byť v niektorých prípadoch prekonvertované do LMI formy pomocou rôznych techník a algebrických nástrojov. V úlohách v oblasti riadenia sa na tento účel často využíva tzv. *Schurov doplnok* [1]. Na preformulovanie maticovej nerovnice, resp. na odstránenie nelinearity pomocou vhodnej transformačnej matice sa požíva tzv. *kongruentná transformácia*, ktorá zachováva symetriu, kososymetriu a definitnosť matice. Medzi ďalšie dôležité prostriedky pre LMI formuláciu množstva problémov z oblasti riadenia patria napr. *Finslerova lema*, *Eliminačná lema* a ich spojením *Projekčná lema* [6], [16].

Hoci algebrická formulácia viacerých problémov robustného riadenia prostredníctvom maticových nerovníc pre spojité systémy, resp. diskrétne systémy je rozpracovaná v mnohých literatúrach, samotné riešenie týchto nerovníc je v niektorých typoch úloh problematické. V takomto prípade hovoríme o *NP ťažkých úlohách* t.j. úlohách, ktoré sa nedajú všeobecne riešiť v reálnom (konečnom) čase. V literatúre sa tento problém označuje ako tzv. „*NP hard*“ problém [5].

3 Cieľ práce

Základnými problémami, ktorými sa dizertačná práca zaoberá sú analýza stability lineárnych časovo-invariantných neurčitých systémov a syntéza robustných regulátorov pri spätnej väzbe od výstupu. Analýza robustnej stability ako aj syntéza robustných regulátorov je realizovaná pre SISO systémy vo frekvenčnej oblasti a pre MIMO systémy v časovej oblasti. Na presnejšie formulovanie a riešenie stanoveného základného problému možno ciele dizertačnej práce formulovať takto:

a) Spracovať prehľad prác z problematiky robustnosti lineárnych SISO a MIMO systémov.
b) Spracovať prehľad rôznych hraničných prenosových funkcií a zaviesť nové hraničné prenosové funkcie spolu s metódami analýzy robustnej stability pre rôzne modely neurčitostí.
c) Využiť klasické metódy syntézy regulátora pre lineárne SISO systémy vo frekvenčnej oblasti pomocou hraničných prenosových funkcii.
d) Porovnať niekoľko súčasných metód analýzy stability lineárnych MIMO systémov v časovej oblasti z hľadiska ich konzervativizmu.
e) Z hľadiska konzervativizmu porovnať metódy syntézy regulátora v časovej oblasti zabezpečujúce kvadratickú stabilitu.

f) Rozšíriť metódy syntézy regulátora v časovej oblasti zabezpečujúce kvadratickú stabilitu s parametricky závislou Ljapunovovou maticou o kvalitu regulácie a porovnať ich konzervativizmus.
g) Riešiť otázku nekonvexného problému syntézy robustných regulátorov pri spätnej väzbe od výstupu.

4 Analýza stability lineárnych časovo-invariantných neurčitých systémov

4.1 Metódy analýzy robustnej stability neurčitých systémov vo frekvenčnej oblasti

V dizertačnej práci sa zameriavame len na metódy analýzy robustnej stability pre intervalové, afinné a multilineárne modely neurčitých systémov. Na základe týchto metód sa pre jednotlivé typy prenosových funkcií navrhne tzv. *hraničná prenosová funkcia*, ktorá predstavuje konečný počet prenosových funkcií objektu s konštantnými parametrami a tieto jednoznačne určujú stabilitu celej množiny prenosových funkcií objektu v uzavretom regulačnom obvode.

Pre rôzne modely neurčitých systémov môžeme jednotlivé metódy analýzy robustnej stability porovnať z hľadiska testovacej množiny, podmienok stability a uvažovaných predpokladov nasledovne.

Intervalové systémy

(1) **Testovacia množina:** 4 Charitonovove polynómy [11]

$$\begin{aligned}
{}^{1}K(s) &= \overline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \overline{a}_4 s^4 + \cdots && (+-) \\
{}^{2}K(s) &= \overline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \overline{a}_4 s^4 + \cdots && (++) \\
{}^{3}K(s) &= \underline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \cdots && (-+) \\
{}^{4}K(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \cdots && (--),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

kde $\underline{a}_k, \overline{a}_k$, $k = 0,1,2,...n$, sú dolné resp. horné ohraničenia zmien koeficientov charakteristickej rovnice.
Podmienky stability: nutné a postačujúce.
Predpoklady: nezávislosť zmien koeficientov charakteristickej rovnice.

(2) **Testovacia množina:** 16 Charitonovových prenosových funkcií [9]

$$\mathbf{G}_K(s) = \left\{ \frac{{}^{i}K_1(s)}{{}^{j}K_2(s)};\ i,j = 1,2,3,4 \right\}, \tag{4.2}$$

kde ${}^{i}K_1(s)$, ${}^{j}K_2(s)$ sú Charitonovove polynómy čitateľa a menovateľa $G(s)$.
Podmienky stability: nutné a postačujúce.

Predpoklady: nezávislosť zmien prvkov prenosovej funkcie systému, nemenný stupeň charakteristickej rovnice a špeciálny tvar regulátora.

(3) **Testovacia množina:** 32 hraničných prenosových funkcií [9]

$$\mathbf{G}_E(s)=\left\{\frac{{}^{i}K_1(s)}{\lambda.{}^{j}K_2(s)+(1-\lambda).{}^{k}K_2(s)}\cup\frac{\lambda.{}^{j}K_1(s)+(1-\lambda).{}^{k}K_1(s)}{{}^{i}K_2(s)}\right\},\quad(4.3)$$

keď $i\in(1,2,3,4)$; $(j,k)\in\{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4)\}$; $\lambda\in\langle 0,\ 1\rangle$.

Podmienky stability: nutné a postačujúce.

Predpoklady: nezávislosť zmien prvkov prenosovej funkcie systému, nemenný stupeň charakteristickej rovnice.

Afinné systémy

(4) **Testovacia množina:** 2^p polytopických prenosových funkcií [4]

$$\mathbf{G}_V(s)=\left\{\frac{P_{V1,j}(s)}{P_{V2,j}(s)};\ j=1,2,\ldots,2^p\right\},\quad(4.4)$$

kde $P_{V1,j}(s)$, $P_{V2,j}(s)$ sú polynómy čitateľa a menovateľa afinnej prenosovej funkcie umiestnené vo vrcholoch kvádra neurčitostí, p – počet neurčitostí.

Podmienky stability: nutné a postačujúce.

Predpoklady: koeficienty neurčitostí sa menia nezávisle.

(5) **Testovacia množina:** $p2^{p-1}$ hraničných polytopických prenos. funkcií [23]

$$\mathbf{G}_P(s)=\left\{\frac{\lambda P_{V1,i}(s)+(1-\lambda)P_{V1,j}(s)}{\lambda P_{V2,i}(s)+(1-\lambda)P_{V2,j}(s)},\ \begin{array}{l} i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,2^p,\ \lambda\in\langle 0,1\rangle \\ (i,j)\in\{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),\ldots\}\end{array}\right\}\quad(4.5)$$

Podmienky stability: nutné a postačujúce.

Predpoklady: stupeň všetkých charakter. rovníc je rovnaký a nemení sa.

Multilineárne systémy - polytopické

(6) **Testovacia množina:** $2^p(2^p-1)/2$ hraničných polytop. prenos. funkcií [23]

$$\mathbf{M}_P(s)=\left\{\frac{\lambda P_{V1,i}(s)+(1-\lambda)P_{V1,j}(s)}{\lambda P_{V2,i}(s)+(1-\lambda)P_{V2,j}(s)},\ i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,2^p,\ \lambda\in\langle 0,1\rangle\right\}\quad(4.6)$$

Podmienky stability: postačujúce.

Predpoklady: char. rovnice majú rovnaký stupeň, pre konvexnú obálku platí princíp vylúčenia nuly a aspoň jedna z rodín char. rovníc je stabilná.

(7) **Testovacia množina:** $p_1p_22^{p1+p2+1}$ hraničných polytop. prenos. funkcií [23]

$$\mathbf{M}_P(s) = \left\{ \frac{\lambda P_{V1,i} + (1-\lambda) P_{V1,j}}{\lambda P_{V2,k} + (1-\lambda) P_{V2,l}}, \begin{array}{l} i \neq j \\ k \neq l \end{array}, \begin{array}{l} i,j = 1,2,\ldots,2^{p_1} \\ k,l = 1,2,\ldots,2^{p_2} \end{array}, \lambda \in \langle 0,1 \rangle \right\}. \quad (4.7)$$

Podmienky stability: postačujúce.
Predpoklady: char. rovnice majú rovnaký stupeň, pre konvexnú obálku platí princíp vylúčenia nuly a aspoň jedna z rodín char. rovníc je stabilná.

Multilineárne systémy - intervalové

(8) **Testovacia množina:** $2.4^{r1}.4^{r2}$ hraničných prenosových funkcií [10]

$$\mathbf{M}_E(s) = \left\{ \frac{\mathbf{K}_{1,1}(s)\mathbf{K}_{1,2}(s)\ldots\mathbf{K}_{1,r_1}(s)}{\mathbf{S}_{2,1}(s)\mathbf{S}_{2,2}(s)\ldots\mathbf{S}_{2,r_2}(s)} \cup \frac{\mathbf{S}_{1,1}(s)\mathbf{S}_{1,2}(s)\ldots\mathbf{S}_{1,r_1}(s)}{\mathbf{K}_{2,1}(s)\mathbf{K}_{2,2}(s)\ldots\mathbf{K}_{2,r_2}(s)} \right\}, \quad (4.8)$$

kde $\mathbf{K}_{i,j}(s)$, $i = 1,2$; $j = 1,2,...,r_i$ je vektor Charitonovových polynómov a $\mathbf{S}_{i,j}(s)$ sú Charitonovove segmenty.
Podmienky stability: nutné a postačujúce.
Predpoklady: nezávislosť zmien prvkov prenosovej funkcie systému.

Pôvodnými výsledkami autora a školiteľa dizertačnej práce sú metóda č. 5 pre afinné systémy a metódy č. 6 a 7 pre multilineárne-polytopické systémy.

Pre jednotlivé druhy hraničných prenosových funkcií môžeme uskutočňovať syntézu robustného regulátora SISO systémov klasickými metódami lineárnej teórie riadenia. Parametre regulátora je potrebné vybrať tak, aby stabilizovali konečný počet prenosových funkcií, ktoré tvoria hraničnú prenosovú funkciu objektu s predpísanou kvalitou riadenia. Metódy, pre ktoré boli v rámci dizertačnej práce urobené programové nástroje v prostredí Matlab® sú: metóda D-kriviek, Reinischova metóda, metóda I_{SE} a I_{TSE}, Bodeho metóda, Henrionova metóda [28], [24] a metóda rozmiestňovania pólov s využitím genetického algoritmu.

5 Syntéza robustných regulátorov pri spätnej väzbe od výstupu

5.1 Syntéza robustných regulátorov pre MIMO systémy v časovej oblasti

Základným problémom, ktorým sa zaoberáme pri syntéze robustných regulátorov pre MIMO systémy v časovej oblasti, je návrh matice regulátora v statickej spätnej väzbe od vektora výstupnej veličiny tak, aby tento regulátor zabezpečil stabilitu a požadovanú kvalitu riadenia pre systém s neurčitosťami. Pri analýze robustnej stability a syntéze robustného regulátora v časovej oblasti bol použitý afinný model neurčitostí, ktorý dáva najmenej konzervatívne výsledky.

Uvažujme lineárny spojitý časovo-invariantný systém

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\delta}\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\delta}\mathbf{B})\mathbf{u}(t) \qquad (5.1)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

kde $\boldsymbol{\delta}\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j q_j$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{B}_j q_j$ sú afinné typy neurčitostí,

$\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_j$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_j$, $\mathbf{C}$ známe matice s konštantnými koeficientmi,

$q_j \in \left\langle \underline{q}_j ,\ \overline{q}_j \right\rangle$, $j = 1,2,\ldots,p$ neznáme intervalové parametre (neurčitosti).

Pre uzavretý regulačný obvod, ktorý je umiestnený v i-tom vrchole kvádra neurčitosti s algoritmom riadenia

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\,\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (5.2)$$

platí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{ci}\mathbf{x}(t) \qquad i = 1,2,\ldots,N, \qquad (5.3)$$

kde $\mathbf{A}_{ci} = \mathbf{A}_{vi} + \mathbf{B}_{vi}\mathbf{F}\mathbf{C}$,

$\mathbf{A}_{vi}$, $\mathbf{B}_{vi}$ sú matice systému umiestnené vo vrchole kvádra neurčitostí, t.j.

$\mathbf{A}_{vi} = \mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^{p} q_j \mathbf{A}_j$, $\mathbf{B}_{vi} = \mathbf{B}_0 + \sum_{j=1}^{p} q_j \mathbf{B}_j$, keď $q_j = \underline{q}_j$ alebo $q_j = \overline{q}_j$,

$\mathbf{F}$ je spätnoväzobná matica od výstupu.

Konvexná obálka opisujúca polytopický systém na hranách p-rozmerného kvádra neurčitostí je

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}(t), \qquad (5.4)$$

kde

$$\boldsymbol{\Omega} := \left\{ \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_{ci}\alpha_i,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,\quad \alpha_i \geq 0 \right\}. \qquad (5.5)$$

V rámci cieľov dizertačnej práce bolo z hľadiska konzervativizmu porovnaných viacero metód syntézy regulátora v časovej oblasti zabezpečujúce kvadratickú stabilitu a kvadratickú stabilitu s parametricky závislou Ljapunovovou maticou, ktorá ma tvar

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_i\alpha_i \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \qquad \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T > \mathbf{0} \qquad \alpha_i \geq 0. \qquad (5.6)$$

Veta 5.1 [19]
Uvažujme lineárny spojitý systém (5.4) s algoritmom riadenia (5.2). Potom algoritmus riadenia (5.2) zabezpečuje pre systém (5.4) stabilitu a kvalitu regulácie vtedy a len vtedy, ak platí nasledujúca nerovnosť

$$\mathbf{A}_c^T(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{Q}+\mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{C}<\mathbf{0}\,. \tag{5.7}$$

□

V oblasti syntézy robustného regulátora zabezpečujúceho kvadratickú stabilitu s parametricky závislou Ljapunovovou maticou (5.6) je pôvodným výsledkom nasledujúca modifikovaná Peaucellova metóda.

Modifikovaná Peaucellova metóda

Pri analýze robustnej stability pomocou Peaucellovej metódy [13] sme použili lineárnu maticovú nerovnicu, ktorú pre uzavretý regulačný obvod (5.3) s algoritmom riadenia (5.2) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{A}_{ci}+\mathbf{A}_{ci}^T\mathbf{H}^T+a\mathbf{P}_i & \mathbf{A}_{ci}^T\mathbf{G}-\mathbf{H}+b\mathbf{P}_i \\ \mathbf{G}^T\mathbf{A}_{ci}-\mathbf{H}^T+b^*\mathbf{P}_i & c\mathbf{P}_i-\mathbf{G}-\mathbf{G}^T \end{bmatrix}<\mathbf{0} \qquad i=1,2,...,N, \tag{5.8}$$

kde $\mathbf{A}_{ci}=\mathbf{A}_{vi}+\mathbf{B}_{vi}\mathbf{F}\mathbf{C}$.

Koeficienty a, b, c definujú stabilnú oblasť v komplexnej rovine

- spojitý systém
  - *ľavá polrovina:* $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$,
  - *kružnica v ľavej polrovine:* $a=x_0^2-r^2$, $b=-x_0$, $c=1$, kde x_0 je x-ová súradnica stredu ($y_0=0$)
- diskrétny systém
  - *jednotkový kruh:* $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$.

Veta 5.2

Uvažujme lineárny spojitý systém (5.4) s algoritmom riadenia (5.2). Potom nasledujúce maticové nerovnice sú ekvivalentné

a) $c\mathbf{A}_c^T(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\alpha})+b^*\mathbf{A}_c^T(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})+b\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\alpha})+a\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{Q}+\mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{C}<\mathbf{0}$ (5.9)

b) $\begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{A}_c^T(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{H}^T+a\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{Q}+\mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{C} & \mathbf{A}_c^T(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{G}-\mathbf{H}+b\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{G}^T\mathbf{A}_c(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{H}^T+b^*\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) & c\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{G}-\mathbf{G}^T \end{bmatrix}<\mathbf{0}$.(5.10)

□

Ak za parametricky závislú Ljapunovovu maticu $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})$ dosadíme zo vzťahu (5.6), tak postačujúcu podmienku pre nerovnicu (5.10) môžeme zapísať v tvare

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{A}_{ci}+\mathbf{A}_{ci}^T\mathbf{H}^T+\mathbf{Q}+\mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{C}+a\mathbf{P}_i & \mathbf{A}_{ci}^T\mathbf{G}-\mathbf{H}+b\mathbf{P}_i \\ \mathbf{G}^T\mathbf{A}_{ci}-\mathbf{H}^T+b^*\mathbf{P}_i & c\mathbf{P}_i-\mathbf{G}-\mathbf{G}^T \end{bmatrix}<\mathbf{0} \tag{5.11}$$

Veta 5.3

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- platí nerovnica (5.11),

- platí dvojica nerovníc
  - $c\mathbf{A}_{ci}^T\mathbf{P}_i\mathbf{A}_{ci} + b\mathbf{P}_i\mathbf{A}_{ci} + b^*\mathbf{A}_{ci}^T\mathbf{P}_i + a\mathbf{P}_i + \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{RFC} < \mathbf{0}\,, \qquad (5.12)$
  - $\mathbf{A}_{ci}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{HA}_{ci} + a\mathbf{P}_i + \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{RFC} < \mathbf{0}\,. \qquad (5.13)$

□

Pre stabilnú oblasť spojitého systému, t.j. $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ nerovnice (5.9) a (5.10) majú tvar

$$\mathbf{A}_{ci}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_{ci} + \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{RFC} < \mathbf{0}\,, \tag{5.14}$$

$$\mathbf{A}_{ci}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{HA}_{ci} + \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{RFC} < \mathbf{0}\,. \tag{5.15}$$

Po dosadení za $\mathbf{A}_{ci} = \mathbf{A}_{vi} + \mathbf{B}_{vi}\mathbf{FC}$, $i = 1,2,\ldots,N$ má prvá nerovnica (5.14) tvar

$$\left(\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{B}_{vi}\mathbf{FC}\right)^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\left(\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{B}_{vi}\mathbf{FC}\right) + \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{RFC} < \mathbf{0} \tag{5.16}$$

a po úprave

$$\mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i\right)^T\mathbf{R}\left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i\right) < \mathbf{0}\,. \tag{5.17}$$

Kvadratická maticová nerovnica (5.17) je vzhľadom na znamienko kvadratického (t.j. nelineárneho) výrazu

$$-\mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i \tag{5.18}$$

nekonvexná a preto ju nemôžeme zjednodušiť na LMI. Aby sme mohli tento výraz zapísať do LMI použijeme linearizáciu nelineárneho člena (5.18) alebo konvexifikáciu.

Linearizácia nelineárneho člena

Linearizáciou nelineárneho člena (5.18) pre $\mathbf{X}_{1i}$ s rovnakou dimenziou ako $\mathbf{P}_i$, získame

$$\mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i \geq \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i} - \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i}\,. \tag{5.19}$$

Pozn.: Rovnosť platí, keď $\mathbf{X}_{1i} = \mathbf{P}_i$. Matice $\mathbf{P}_i$ a $\mathbf{X}_{1i}$ sú symetrické, t.j. platí $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T$ a $\mathbf{X}_{1i} = \mathbf{X}_{1i}^T$, $i = 1,2,\ldots,N$. Matica $\mathbf{X}_{1i}$ je fixná a $\mathbf{P}_i$ je premenná.

Dosadením (5.19) do (5.17) získame nerovnicu

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i} + \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i} +\\ + \left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i\right)^T\mathbf{R}\left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i\right) < \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Použitím vety o Schurovom doplnku nerovnica (5.20) pre fixnú maticu $\mathbf{X}_{1i}$ je ekvivalentná s nasledujúcou LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{Y}_i & \left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i\right)^T \\ \mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}\,, \tag{5.21}$$

kde $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i} - \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i}$, $i = 1,2,\ldots,N$.

Konvexifikácia

Za účelom odstránenia nekonvexnosti kvadratickej maticovej nerovnosti (5.17) pomocou konvexifikácie je vhodné nerovnicu (5.17) rozdeliť na dve časti:

- $\mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i < \mathbf{0}$, (5.22a)
- $\left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i\right)^T \mathbf{R}\left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i\right) \geq \mathbf{0}$. (5.22b)

Druhá časť (5.22b) zostáva vždy kladne semidefinitná a prvú časť (5.22a) nahradíme lineárnou maticovou nerovnicou (5.24) uvedenou v nasledujúcej vete.

Veta 5.4

Majme symetrickú, kladne definitnú maticu $\mathbf{X}_{1i} \in \Re^{n\times n}$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné

a) $$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i & \left(\mathbf{X}_{1i} - \mathbf{P}_i\right)\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\left(\mathbf{X}_{1i} - \mathbf{P}_i\right) & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{5.23}$$

b) $$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i} - \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i & \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i} & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{5.24}$$

□

Dôsledkom uvedenej vety je, že ak platí nerovnica (5.24) pre nejaké $\mathbf{X}_{1i} \neq \mathbf{0}$, potom platí aj nerovnica (5.22a). Nerovnica (5.24) predstavuje konvexifikačnú funkciu pre $\mathbf{X}_{1i} \approx \mathbf{P}_i$ a nerovnicu (5.22a). Môžeme ju použiť aj na výpočet počiatočnej hodnoty matice $\mathbf{P}_i$ pre iteračné algoritmy syntézy riadenia.

Ak nahradíme člen (1,1) v nerovnici (5.21) konvexifikačnou funkciou (5.24), tak získame nasledujúcu LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{V}_i & \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1} & \left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i\right)^T \\ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i} & -\mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i & \mathbf{0} & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{5.25}$$

kde $\mathbf{V}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_{1i} + \mathbf{X}_{1i}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{P}_i$, $i = 1,2,\ldots,N$.

Druhú nerovnicu (5.15) môžeme dosadením za $\mathbf{A}_{ci} = \mathbf{A}_{vi} + \mathbf{B}_{vi}\mathbf{FC}$ zapísať v tvare

$$\left(\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{B}_{vi}\mathbf{FC}\right)^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\left(\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{B}_{vi}\mathbf{FC}\right) + \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T\mathbf{F}^T\mathbf{RFC} < \mathbf{0} \tag{5.26}$$

a po úprave

$$\mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{HA}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{HB}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T\right)^T\mathbf{R}\left(\mathbf{FC} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T\right) < \mathbf{0} \tag{5.27}$$

Kvadratická maticová nerovnica (5.27) je vzhľadom na znamienko kvadratického (t.j. nelineárneho) výrazu

$$-\mathbf{H}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T \tag{5.28}$$

nekonvexná a preto ju nemôžeme zjednodušiť na LMI. Aby sme mohli tento výraz zapísať do LMI použijeme opäť linearizáciu nelineárneho člena (5.28) alebo konvexifikáciu.

Linearizácia nelineárneho člena

Linearizáciou nelineárneho člena (5.28) pre zvolené $\mathbf{X}_2$ a $\mathbf{H}$ s rovnakou dimenziou, získame

$$\mathbf{H}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T \geq \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T - \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T\,. \tag{5.29}$$

Pozn.: Rovnosť platí, keď $\mathbf{X}_2 = \mathbf{H}$. Matica $\mathbf{X}_2$ je fixná a $\mathbf{H}$ je premenná.

Dosadením (5.29) do (5.27) získame nerovnicu

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T - \mathbf{H}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T + \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T + \\ + \left(\mathbf{F}\mathbf{C} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T\right)^T\mathbf{R}\left(\mathbf{F}\mathbf{C} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T\right) < \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Podľa vety o Schurovom doplnku nerovnica (5.30) je pre fixnú maticu $\mathbf{X}_2$ ekvivalentná s nasledujúcou LMI

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{U}_i & \left(\mathbf{F}\mathbf{C} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T\right)^T \\ \mathbf{F}\mathbf{C} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T & -\mathbf{R}^{-1}\end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad i = 1,2,\ldots,N\,, \tag{5.31}$$

kde $\mathbf{U}_i = \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T - \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T$.

Konvexifikácia

Za účelom odstránenia nekonvexnosti kvadratickej maticovej nerovnosti (5.27) pomocou konvexifikácie je vhodné nerovnicu (5.27) rozdeliť na dve časti:

- $\mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{H}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T < \mathbf{0}\,,$ (5.32a)
- $\left(\mathbf{F}\mathbf{C} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T\right)^T\mathbf{R}\left(\mathbf{F}\mathbf{C} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T\right) \geq \mathbf{0}\,.$ (5.32b)

Druhá časť (5.32b) zostáva vždy kladne semidefinitná a prvú časť (5.32a) nahradíme lineárnou maticovou nerovnicou (5.34) uvedenou v nasledujúcej vete.

Veta 5.5

Majme kladne definitnú maticu $\mathbf{X}_2 \in \Re^{n\times n}$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné

a) $$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{H}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T & \left(\mathbf{X}_2 - \mathbf{H}\right)\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\left(\mathbf{X}_2 - \mathbf{H}\right)^T & -\mathbf{R}^{-1}\end{bmatrix} < \mathbf{0}\,, \tag{5.33}$$

b) $$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{H}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T - \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T & \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \,. \quad (5.34)$$

□

Ak nahradíme člen (1,1) v nerovnici (5.31) konvexifikačnou funkciou (5.34), tak získame nasledujúcu LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{A}_{vi} + \mathbf{Q} - \mathbf{V}_i & \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1} & \left(\mathbf{F}\mathbf{C} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T\right)^T \\ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T & -\mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}\mathbf{C} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \,, \qquad (5.35)$$

kde $\mathbf{V}_i = \mathbf{H}\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{X}_2^T + \mathbf{X}_2\mathbf{B}_{vi}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_{vi}^T\mathbf{H}^T$, $i = 1,2,\ldots,N$.

V nasledujúcom iteračnom algoritme na riešenie maticových nerovníc (5.14) a (5.15) môžeme použiť nerovnicu (5.21) a (5.31) alebo (5.25) a (5.35) v závislosti od toho, či požadujem realizovať algoritmus linearizáciou nelineárneho člena alebo konvexifikáciu.

Algoritmus 5.1 (*Modifikovaná Peaucellova metóda*)

(1) Vybrať $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > \mathbf{0}$ a počiatočnú hodnotu $\mathbf{X}_{1i}$ a $\mathbf{X}_2$ napr. výpočtom $\mathbf{P}_i$, $i = 1,2,\ldots,N$ z algebrickej Riccatiho rovnice

$$\mathbf{A}_{vi}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{A}_{vi} - \mathbf{P}_i\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_i + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \mathbf{X}_{1i} = \mathbf{P}_i \,, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{P}_1 \qquad (5.36)$$

(2) Pre známe matice $\mathbf{X}_{1i}$ a $\mathbf{X}_2$ sa LMI algoritmom vypočítajú matice **F**, $\mathbf{P}_i$ a **H** z nerovníc (5.21) a (5.31) (linearizácia) resp. z nerovníc (5.25) a (5.35) (konvexifikácia).

(3) Výpočet chyby $er_1 = \|\mathbf{X}_{1i} - \mathbf{P}_i\|$, $er_2 = \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{H}\|$.

Ak $er_1 \le toler$ & $er_2 \le toler$, tak STOP výpočtu **F**, $\mathbf{P}_i$ a **H**, inak $\mathbf{X}_{1i} = \mathbf{P}_i$, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{H}$ a pokračuje sa v bode (2).

□

Ak algoritmus nedosiahne stabilizujúce riešenie, môžeme vybrať iné **Q** resp. **R** alebo zmeniť počiatočné podmienky výpočtu a spustiť algoritmus odznova.

Dôležitú úlohu pri riešení iteračnými algoritmami použitými v metódach syntézy robustného regulátora zohráva výber počiatočných podmienok. Voľba vhodnej počiatočnej podmienky je dôležitá nielen z hľadiska priblíženia sa k samotnému riešeniu LMI algoritmu, ale aj ku dosiahnutiu najväčšej stabilnej oblasti a najmenšieho počtu iterácii potrebných pre získanie riešenia algoritmu. V tejto oblasti sú pôvodnými výsledkami štyri rôzne postupy výpočtu počiatočných podmienok pomocou konvexifikačných funkcií.

5.2 Porovnanie a vyhodnotenie metód syntézy robustného regulátora

Metódy syntézy robustného regulátora pre MIMO systémy v časovej oblasti uvedené v dizertačnej práci sú porovnané na vzorke 50 náhodne vygenerovaných príkladov (resp. matíc $\mathbf{A}_{vi}$, $\mathbf{B}_{vi}$, $i = 1,2,\ldots,N$), pričom je sledovaný ich konzervativizmus z hľadiska dosiahnutej veľkosti stabilnej oblasti.

V jednotlivých generovaných príkladoch sa zaoberáme otázkou: „Aký je maximálny rozsah parametra neurčitosti q_{abs}, aby uzavretý regulačný obvod so spätnoväzobnou maticou zosilnenia **F** zostal stabilný?“

Dosiahnuté výsledky boli vyhodnotené nasledovným spôsobom:

1) Každá metóda bola umiestnená na základe pridelených bodov za maximálnu hodnotu neurčitého parametra q_{abs} ($q_{max} = \max(q_{abs})$). Najväčšia hodnota q_{max} znamená najlepšie hodnotenie a preto bol pridelený jeden bod, atď., t.j. menej bodov – lepšie hodnotenie metódy.
2) Pri každej metóde sa počítal aritmetický priemer q_m zo všetkých maximálnych hodnôt neurčitých parametrov q_{max}. Väčšia hodnota q_m znamená lepšiu metódu.
3) Pre všetky metódy bol počítaný percentuálny výskyt každého bodu prideleného za q_{max}. Týmto kritériom sa môže detailnejšie ilustrovať relatívna úspešnosť každej metódy.

Priemerné hodnoty výsledkov porovnania viacerých metód syntézy robustného regulátora zabezpečujúce parametricky závislú kvadratickú stabilitu sú uvedené v tab. 5.1.

Tabuľka 5.1

p	*n*	*Metóda*	PEAU-lin	PEAU-kon	HEN-lin	HEN-kon	VES-lin	VES-kon
2	2	*Hodnotenie*	3.80	4.64	3.52	3.44	1.54	4.02
		q_m	7.82	7.42	9.04	9.23	15.17	7.35
	3	*Hodnotenie*	3.04	3.34	4.34	4.06	1.40	4.72
		q_m	5.82	5.76	4.23	4.35	7.13	4.18
	4	*Hodnotenie*	2.68	2.70	4.60	4.16	1.68	4.92
		q_m	3.72	3.69	2.56	2.62	4.45	2.13
	5	*Hodnotenie*	2.56	2.68	4.38	4.30	1.62	5.26
		q_m	3.19	3.21	2.37	4.38	3.71	1.61
	6	*Hodnotenie*	2.56	2.44	4.46	4.26	1.62	5.42
		q_m	2.77	2.77	1.86	1.87	3.02	1.22
	7	*Hodnotenie*	2.18	2.40	4.52	4.02	1.84	5.64
		q_m	2.37	2.35	1.55	1.57	2.41	0.63

kde jednotlivé skratky majú nasledujúci význam:

PEAU-lin – modifikovaná Peaucellova metóda s linearizáciou,

PEAU-kon – modifikovaná Peaucellova metóda s konvexifikáciou,
HEN-lin – Henrionova metóda [8] s linearizáciou nelineárneho člena,
HEN-kon – Henrionova metóda s konvexifikáciou,
VES-lin – Veselého metóda [34] s linearizáciou nelineárneho člena,
VES-kon – Veselého metóda s konvexifikáciou.
q_m – priemerná hodnota maximálneho neurčitého parametra q_{max},
p – počet neurčitých parametrov,
n – rozmer ($n \times n$) stabilnej matice $\mathbf{A}_{vi}$.

Priemerný percentuálny výskyt jednotlivých bodov je uvedený v tabuľke 5.2.

Tabuľka 5.2

Body	PEAU-lin	PEAU-kon	HEN-lin	HEN-kon	VES-lin	VES-kon
1	13.00	14.33	3.000	2.667	71.00	0
2	35.00	30.00	9.667	11.00	4.333	9.333
3	26.00	25.67	11.67	13.33	20.33	1.333
4	11.00	10.00	22.33	33.00	0.667	27.33
5	14.67	8.000	36.33	32.67	3.667	4.333
6	0.333	12.00	17.00	7.333	0	57.67

Veselého metóda s linearizáciou nelineárneho člena (VES-lin) z hľadiska konzervativizmu dosiahla najlepšie hodnotenie, ktoré sa v závislosti od veľkosti n výraznejšie nemení (1.40 až 1.84). Pri modifikovanej Peaucellovej metóde (PEAU-lin a PEAU-kon) sa zvyšovaním n zlepšuje hodnotenie a pri metóde VES-kon sa naopak zhoršuje. Metódy HEN-lin a HEN-kon majú podobné výsledky. Dosiahnutá najväčšia priemerná neurčitosť q_m každej metódy sa s narastajúcim n zmenšuje. Z percentuálneho výskytu pridelených bodov pre jednotlivé metódy (tab. 5.2) vidíme, že metóda VES-lin získala najlepšie hodnotenie t.j. „bod: 1“ v priemere v 71% prípadov.

6 Vyhodnotenie výsledkov

Základnými problémami, ktorými sa dizertačná práca zaoberala sú analýza stability lineárnych časovo-invariantných neurčitých systémov a syntéza robustných regulátorov pri spätnej väzbe od výstupu. Analýza robustnej stability ako aj syntéza robustných regulátorov bola realizovaná pre SISO systémy vo frekvenčnej oblasti a pre MIMO systémy v časovej oblasti. Podrobnejšiu špecifikáciu cieľov a prostriedkov pre analýzu stability a syntézu regulátorov sme uskutočnili na základe spracovania prehľadu výsledkov publikovaných v oblasti robustného riadenia. Nakoľko ide o rozsiahlu literatúru a treba tiež uvážiť práce z príbuzných oblastí, prehľad súčasného stavu problematiky (kapitola 2) si nemôže činiť nárok na úplnosť a predstavuje niektoré základné smery a výsledky.

Pri metódach analýzy robustnej stability lineárnych SISO systémov vo frekvenčnej oblasti sme sa zamerali na intervalové, afinné a multilineárne modely neurčitých systémov. Na základe týchto metód sa pre jednotlivé typy prenosových funkcií modelov navrhne tzv. hraničná prenosová funkcia objektu, ktorá predstavuje konečný počet prenosových funkcií objektu s konštantnými parametrami. Celkovo sme zaviedli osem hraničných prenosových funkcií, ktoré sa medzi sebou líšia veľkosťou testovacej množiny, podmienkami stability a uvažovanými predpokladmi (kapitola 4). V tejto oblasti sú pôvodnými výsledkami hraničná prenosová funkcia pre afinné systémy a dva druhy hraničných prenosových funkcií pre multilineány-polytopický systém. Na syntézu robustného regulátora sme využili niekoľko klasických metód lineárnej teórie riadenia, ktoré zabezpečujú nielen stabilitu uzavretého regulačného obvodu pre celú množinou hraničných prenosových funkcií, ale aj predpísanú kvalitu riadenia.

V prípade metód analýzy robustnej stability a syntézy robustných regulátorov lineárnych MIMO systémov v časovej oblasti sme použili najmenej konzervatívny afinný model neurčitostí. Pre spojité a diskrétne systémy a pre rôzny počet neurčitostí a rozmer matice systému bol na vzorke 500 príkladov sledovaný konzervativizmus ôsmich metód analýzy robustnej stability z hľadiska dosiahnutej veľkosti stabilnej oblasti. Pri spojitých systémoch je najmenej konzervatívna afinná kvadratická stabilita, ktorá v priemere vo viac ako 98% zo všetkých generovaných príkladov dosiahla najlepšie hodnotenie. Na druhej strane najviac konzervatívnou metódou je kvadratická stabilita. V diskrétnych systémoch žiadna metóda nie je jednoznačne najlepšia. Na prvom mieste sa v závislosti od počtu neurčitostí striedajú metódy Oliveira a Henriona. Avšak jednoznačne najviac konzervatívna je opäť metóda kvadratickej stability. Dôležitou charakteristickou vlastnosťou metód analýzy robustnej stability je ich aplikovateľnosť pre návrh robustného regulátora a preto je potrebné vyberať metódy, ktoré sú najmenej konzervatívne. Dôvodom rozvíjania stále nových metód pre analýzu robustnej stability je nielen aby sa postačujúce podmienky stability čo najbližšie priblížili k nutným a postačujúcim podmienkam, ale aj navrhnúť podmienky stability v tvare vhodnom pre modifikovanie na návrh spätnoväzobného regulátora od výstupu výpočtovo efektívnymi algoritmami (LMI).

Z hľadiska konzervativizmu sme porovnávali tri metódy syntézy regulátora v časovej oblasti zabezpečujúce kvadratickú stabilitu, pričom jedna z nich bola neiteračná. Pre rôzny počet neurčitostí a rozmer matice systému bola na testovacej vzorke 50 náhodne vygenerovaných príkladov opäť sledovaná dosiahnutá veľkosť stabilnej oblasti. Z výsledkov môžeme konštatovať, že najmenej konzervatívna je linearizačná metóda. Ďalej sme porovnávali konzervativizmus troch metód syntézy robustného regulátora v časovej oblasti zabezpečujúce kvalitu regulácie a parametricky závislú kvadratickú stabilitu. Pôvodným výsledkom je úprava Peaucellovej metódy analýzy stability na metódu syntézy regulátora so zabezpečením kvality regulácie. V jednotlivých metódach bol nekonvexný problém riešený pomocou linearizácie nelineárneho člena a konvexifikáciou. Najmenej konzervatívnou metódou je Veselého metóda s linearizáciou nelineárneho člena. V priemere približne v 74% zo všetkých generovaných príkladov dosiahla najlepšie hodnotenie. Zavedenie konvexifikácie zaznamenalo zmiernenie konzervativizmu len v prípade Henrionovej metódy. Výrazné zhoršenie nastalo pri Veselého metóde.

Dôležitú úlohu pri riešení algoritmami použitými v metódach zabezpečujúcich parametricky závislú kvadratickú stabilitu zohráva výber počiatočných podmienok. Vhodná voľba počiatočnej podmienky je dôležitá nielen z hľadiska priblíženia sa k samotnému riešeniu LMI algoritmu, ale aj ku dosiahnutiu najväčšej stabilnej oblasti (t.j. najväčšej neurčitosti q, pre ktorú sa dá ešte navrhnúť regulátor so spätnou väzbou od výstupu) a najmenšieho počtu iterácií potrebných pre získanie riešenia algoritmu. Pôvodným výsledkom sú štyri rôzne algoritmy na výpočet počiatočných podmienok pre každú metódu. Podobne ako v prechádzajúcich prípadoch na testovacej vzorke 50 náhodne vygenerovaných príkladov sme opäť sledovali dosiahnutú veľkosť stabilnej oblasti. V tomto prípade sme sa zamerali len na modifikovanú Peaucellovu metódu. Z dosiahnutých výsledkov môžeme konštatovať, že výpočet počiatočných podmienok nepriniesol výrazne zníženie konzervativizmu metód, aj keď boli prípady jeho zníženia, teda prístup k výpočtu počiatočných podmienok navrhnutý v tejto práci môže v konkrétnych prípadoch výrazne vylepšiť výsledky dosiahnuté príslušnými metódami. Poslednou sledovanou úlohou bol počet iterácií potrebných k nájdeniu riešenia, t.j. aby URO so spätnoväzobnou maticou zosilnenia bol stabilný. Jeden zo spôsobov výpočtu počiatočných podmienok dosiahol v približne 30% zo všetkých generovaných príkladov najmenší počet iterácií, avšak na druhej strane pre takmer každý piaty príklad nenašiel riešenie. Preto problém výberu počiatočných podmienok zostáva stále otvorenou otázkou a jeho vyriešenie môže viesť ku vylepšeniu mnohých súčasných metód syntézy regulátora využívajúcich na riešenie LMI algoritmus.

Na základe uvedeného možno skonštatovať, že pôvodné výsledky tejto práce vrátane rozsiahleho testovania a vyhodnotenia jednotlivých prístupov výrazne prispieva k obohateniu dosiaľ publikovaných výsledkov z tejto oblasti.

7 Záver

Predložená dizertačná práca predstavuje príspevok v oblasti analýzy stability lineárnych časovo-invariantných neurčitých systémov a syntézy robustných regulátorov pri spätnej väzbe od výstupu. Z hľadiska stanovených cieľov dizertačnej práce, ktoré sú sformulované v tretej kapitole možno konštatovať, že stanovené ciele dizertačnej práce boli splnené. Hlavný prínos je nielen teoretickej oblasti, ale aj v návrhu riadenia pre mnohé reálne procesy.

Literatúra

[1] ALBERT, A.: Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses. *SIAM J. Appl. Math.*, 17, 1969.

[2] AYRES, F. JR.: Theory and Problems of Matrices. *New York: Schaum*, pp. 115, 1962.

[3] BARLETT, A. C., HOLLOT, C. V., LIN, H.: Root location of an entire polytope of polynomials: It sufficient to check the edges. *Mathematics of Controls, Signals and Systems*, vol. 1, 1988, pp. 61-71.

[4] BHATTACHARYYA, S. P., CHAPELLAT, H., KEEL, L. H.: Robust Control: The Parametric Approach. *Prentice Hall*, 1995.

[5] BLONDEL, V. D., TSITSIKLIS, J. N.: A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, Vol. 36, 2000, pp. 1249-1274.

[6] BOYD, S., EL GHAOUI, L., FERON, E., BALAKRISHNAN, V.: Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM Studies in Applied Mathematics.* Philadelphia, 1994.

[7] GAHINET, P., APKARIAN, P., CHILALI, M.: Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, 1996, pp. 436-442.

[8] HENRION, D., ARZELIER, D., PEAUCELLE, D.: Positive polynomial matrices and improved LMI Robustness Conditions. *15th Trennial World Congress of the International Federation of Automatic Control*, Barcelona, 2002.

[9] CHAPELLAT, H., BHATTACHARYYA, S. P.: A generalization of Kharitonov's theorem: robust stability of interval plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-34, no. 3, 1989, pp. 306-311.

[10] CHAPELLAT, H., KEEL, L. H., BHATTACHARYYA, S. P.: Extremal robustness properties of multilinear interval systems. *Automatica*, 30, No. 6, 1994, pp. 1037-1042.

[11] KHARITONOV, V. L.: Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Translation in Differential Equations*, vol. 14, 1979, pp. 1483-1485.

[12] DE OLIVEIRA, M. C., BERNUSSOU, J., GEROMEL, J. G.: A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, vol. 37, 1999, pp. 261-265.

[13] PEAUCELLE, D., ARZELIER, D., BACHELIER, O., BERNUSSOU, J.: A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems and Control Letters*, 40, 2000, pp. 21-30.

[14] PYATNITSKII, E. S., SKORODINSKII, V. I.: Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem. *Systems & Control Letters*, vol. 2, 1982, pp. 130-135.

[15] ROSINOVÁ, D., VESELÝ, V.: Robust Output Feedback Design of Linear Discrete-Time Systems - LMI Approach. *4th IFAC Symposium Robust Control Design*, Milano, Italy, 2003, CD-ROM.

[16] SKELTON, R. E., IWASAKI, T., GRIGORIADIS, K.: A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design. *Taylor & Francis*, 1998.
[17] TAKAHASHI, R. H. C., RAMOS, D. C. W., PERES, P. L. D.: Robust Control Synthesis via a Genetic Algorithm and LMI's. *15th Trennial World Congress of the IFAC*, Barcelona, 2002.
[18] VESELÝ, V.: Robust output feedback control synthesis: LMI approach. *IFAC Conference Control System Design*, Bratislava, 2003.
[19] VESELÝ, V.: Static Output Feedback Controller Design. *Kybernetika*, vol. 37, no. 2, 2001, pp. 205-221.
[20] ZADEH, L. A., DESOER, C. A.: *Linear Systems Theory*. McGraw Hill Book Co., New York, 1963.

Publikácie autora

[21] HYPIUSOVÁ, M., GRMAN, Ľ.: Návrh robustného regulátora pre intervalové systémy s dopravným oneskorením. *Medzinárodná konferencia SSKI Kybernetika a informatika.* Piešťany, 5.-6. apríl 2001.
[22] VESELÝ, V., HYPIUSOVÁ, M., GRMAN, Ľ.: Nastavovanie parametrov regulátora pre reálne objekty. *AT&P Journal*, vol. 9, No.1, 2002, str. 67-69.
[23] GRMAN, Ľ., HYPIUSOVÁ, M., VESELÝ, V.: Robust controller design for multilinear interval uncertainty. *5th International Scientific - Technical Conference Process Control 2002*. Kouty nad Desnou, Czech Republic: June 9-12, 2002.
[24] GRMAN, Ľ., VESELÝ, V.: Robust controller design. *The Fifth Scientific Conference on Electrical Engineering & Information Technology for Ph.D. students*. Bratislava, Slovak Republic, September 19, 2002.
[25] GRMAN, Ľ, VESELÝ, V., HYPIUSOVÁ, M.: Riadenie reálnych objektov a parametre regulátora. *Konferencia s medzinárodnou účasťou Elektrotechnika a energetika 2002-ELOSYS*. Trenčín, 15.-18. októbra 2002.
[26] VESELÝ, V., GRMAN, Ľ.: Problémy a riešenia robustného riadenia lineárnych systémov. *Automa*, vol. 9, č. 4, 2003, str. 54-59.
[27] GRMAN, Ľ, VESELÝ, V.: Robust Stability Analysis of Linear Systems. *14th International Conference on Process Control 2003*. Štrbské Pleso, High Tatras, Slovak Republic, June 8-11, 2003.
[28] GRMAN, Ľ, VESELÝ, V.: Extremal Transfer Functions in Robust Control System Design. *2nd International Federation of Automatic Control Conference, Control Systems Design*. Bratislava, Slovak Republic, September 7-10, 2003.
[29] GRMAN, Ľ, VESELÝ, V.: Extremal Transfer Functions in Robust Control System Design. *Journal of Electrical Engineering*, vol. 55, no.1-2, 2004, pp. 11-17.
[30] GRMAN, Ľ., VESELÝ, V.: Robust Output Feedback Controller Design by Quadratic Stability Methods. *6th International Scientific - Technical*

Conference Process Control 2004. Kouty nad Desnou, Czech Republic: June 8-11, 2004.
[31] GRMAN, Ľ., VESELÝ, V.: Návrh PSS pomocou parametricky závislej Ljapunovovej funkcie. *6-tá medzinárodná konferencia – Riadenie v energetike 2004*. Štrbské Pleso, Vysoké Tatry, 16.-18. júna 2004.
[32] VESELÝ, V., ROSINOVÁ, D., KOZÁKOVÁ, A., HYPIUSOVÁ, M., GRMAN, Ľ.: Robustné riadenie lineárnych systémov – prehľad. *Medzinárodná konferencia SSKI Kybernetika a informatika*. Dolný Kubín, 9.-11. február 2005.
[33] GRMAN, Ľ., VESELÝ, V.: Robust Output Feedback Quadratic Controller Design. *Journal of Electrical Engineering*, vol. 56, no. 5-6, 2005, pp. 1-7.
[34] GRMAN, Ľ., ROSINOVÁ, D., KOZÁKOVÁ, A., VESELÝ, V.: Robust Stability Conditions for Polytopic Systems. *International Journal of Systems Science*, 2004, (submitted).
[35] ROSINOVÁ, D., VESELÝ, V., GRMAN, Ľ.: Robust Controller Design for Linear Systems with Polytopic Uncertainty. *Control Engineering Practice*, 2005, (submitted).

Súhrn

Základnými problémami, ktorými sa dizertačná práca zaoberala sú analýza stability lineárnych časovo-invariantných neurčitých systémov a syntéza robustných regulátorov pri spätnej väzbe od výstupu. Analýza robustnej stability ako aj syntéza robustných regulátorov bola realizovaná pre SISO systémy vo frekvenčnej oblasti a pre MIMO systémy v časovej oblasti.

Na základe metód analýzy robustnej stability lineárnych SISO systémov vo frekvenčnej oblasti a pre jednotlivé typy prenosových funkcií modelov neurčitostí sme navrhli hraničné prenosové funkcie objektu. Celkovo sme zaviedli osem hraničných prenosových funkcií, ktoré sa medzi sebou líšia veľkosťou testovacej množiny, podmienkami stability a uvažovanými predpokladmi. V tejto oblasti sú pôvodnými výsledkami hraničná prenosová funkcia pre afinné systémy a dva druhy hraničných prenosových funkcií pre multilineány-polytopický systém. Na syntézu robustného regulátora sme využili niekoľko klasických metód lineárnej teórie riadenia, ktoré zabezpečujú nielen stabilitu uzavretého regulačného obvodu pre celú množinou hraničných prenosových funkcií, ale aj predpísanú kvalitu riadenia.

V prípade metód analýzy robustnej stability a syntézy robustných regulátorov lineárnych MIMO systémov v časovej oblasti sme použili afinný model neurčitostí. Pre spojité a diskrétne systémy a pre rôzny počet neurčitostí a rozmer matice systému bol na vzorke 500 príkladov sledovaný konzervativizmus ôsmich metód analýzy robustnej stability z hľadiska dosiahnutej veľkosti stabilnej oblasti. Pri spojitých systémoch je najmenej konzervatívna afinná kvadratická stabilita, ktorá v priemere vo viac ako 98%

prípadov dosiahla najlepšie hodnotenie. V diskrétnych systémoch žiadna metóda nie je jednoznačne najlepšia. Na prvom mieste sa v závislosti od počtu neurčitostí striedajú metódy Oliveira a Henriona. Najviac konzervatívnou metódou v prípade spojitých a diskrétnych systémov je kvadratická stabilita. Dôvodom rozvíjania stále nových metód pre analýzu robustnej stability je nielen aby sa postačujúce podmienky stability čo najbližšie priblížili k nutným a postačujúcim podmienkam, ale aj navrhnúť podmienky stability v tvare vhodnom pre modifikovanie na návrh spätnoväzobného regulátora od výstupu výpočtovo efektívnymi algoritmami (LMI).

Z hľadiska konzervativizmu sme porovnávali tri metódy syntézy regulátora v časovej oblasti zabezpečujúce kvadratickú stabilitu, pričom jedna z nich bola neiteračná. Pre rôzny počet neurčitostí a rozmer matice systému bola na testovacej vzorke 50 náhodne vygenerovaných príkladov opäť sledovaná dosiahnutá veľkosť stabilnej oblasti. Z výsledkov môžeme konštatovať, že najmenej konzervatívna je linearizačná metóda. Ďalej sme porovnávali konzervativizmus troch metód syntézy robustného regulátora v časovej oblasti zabezpečujúce kvalitu regulácie a parametricky závislú kvadratickú stabilitu. Pôvodným výsledkom je úprava Peaucellovej metódy analýzy stability na metódu syntézy regulátora so zabezpečením kvality regulácie. V jednotlivých metódach bol nekonvexný problém riešený pomocou linearizácie nelineárneho člena a konvexifikáciou. Najmenej konzervatívnou metódou je Veselého metóda s linearizáciou nelineárneho člena. V priemere približne v 74% zo všetkých generovaných príkladov dosiahla najlepšie hodnotenie. Zavedenie konvexifikácie zaznamenalo zmiernenie konzervativizmu len v prípade Henrionovej metódy.

Dôležitú úlohu pri riešení algoritmami použitými v metódach zabezpečujúcich parametricky závislú kvadratickú stabilitu zohráva výber počiatočných podmienok. Pôvodným výsledkom sú štyri rôzne algoritmy na výpočet počiatočných podmienok pre každú metódu. Dosiahnutú veľkosť stabilnej oblasti sme sledovali len na modifikovanej Peaucellovej metóde. Z výsledkov môžeme konštatovať, že výpočet počiatočných podmienok nepriniesol výrazne zníženie konzervativizmu metód, aj keď boli prípady jeho zníženia, teda prístup k výpočtu počiatočných podmienok navrhnutý v tejto práci môže v konkrétnych prípadoch výrazne vylepšiť výsledky dosiahnuté príslušnými metódami. Poslednou sledovanou úlohou bol počet iterácií potrebných k nájdeniu riešenia, t.j. aby uzavretý regulačný obvod so spätnoväzobnou maticou zosilnenia bol stabilný. Jeden zo spôsobov výpočtu počiatočných podmienok dosiahol v približne 30% zo všetkých generovaných príkladov najmenší počet iterácií, avšak na druhej strane pre takmer každý piaty príklad nenašiel riešenie. Preto problém výberu počiatočných podmienok zostáva stále otvorenou otázkou a jeho vyriešenie môže viesť ku vylepšeniu mnohých súčasných metód syntézy regulátora využívajúcich na riešenie LMI algoritmus.

Summary

This PhD thesis is devoted to problems of stability analysis for linear continuous time-invariant systems with uncertainties and robust controller design with a static output feedback. The robust stability analysis as well as the robust controller design has been realized for SISO systems in the frequency domain and for MIMO systems in the time domain.

On the basis of robust stability analysis methods for linear SISO systems in the frequency domain and for particular types of transfer functions of uncertainty models extremal transfer functions of object have been designed. The eight transfer functions have been established, that differs from each other by size of test set, stability conditions and considered assumptions. The original contribution of this thesis in this field are extremal transfer function for affine systems and two proposed extremal transfer functions for multilinear-polytopic system. The robust controller design has been carried out by classical methods of linear control theory, that guarantee not only stability of closed loop system for all extremal transfer functions set, but specified performance as well.

In a case of robust stability analysis methods and robust controller design for linear MIMO systems in the time domain the affine uncertainty model has been used. The conservatism of eight robust stability analysis methods in terms of “stability region size” has been evaluated on 500 randomly generated examples for continuous-time and discrete-time systems and for various number of uncertainties and size of system matrix. We can observe from the obtained results that for continuous-time systems, the affine quadratic criterion is undoubtedly the least conservative that has obtained the best rating in 98 % from all generated examples. For discrete-time systems no method can be declared as superior to others. The methods proposed by Oliveira and Henrion alternate on the first place in dependence on number of uncertainties. The quadratic stability is the most conservative method for both continuous-time and discrete-time systems. The reason for development of new stability analysis methods is not only in order to relax a sufficient robust stability conditions and make them as close as possible to necessary and sufficient ones, but also to propose stability condition in the form that could be easily modified for robust output feedback controller design.

The conservatism of three robust controller synthesis methods in the time domain, that guarantee quadratic stability, has been compared for various number of uncertainties and size of system matrix. Linearization method has proved as the least conservative. In the next part, conservatism of three robust controller synthesis methods in the time domain that guarantee parameter dependent quadratic stability has been compared. The original contribution is the modification of Peaucelle stability analysis method to controller synthesis method with guaranteed specified performance. Nonconvex problem in individual methods has been solved by linearization of nonlinear term and by

convexification. The least conservative is Vesely method with linearization of nonlinear term that has obtained the best rating in 74 % from all generated examples. Application of convexification has brought reduction of conservatism only in Henrion method.

A choice of initial conditions is important in robust control design by algorithms applied in methods that guarantee parameter dependent quadratic stability. The original contribution are four different algorithms for a computation of initial conditions for each method. The achieved stability region size has been studied only for the modified Peaucelle method. We can observe from the obtained results that initial conditions computing has not remarkably reduced conservatism of the considered methods, however there were cases of its reduction. The last studied task has been a number of iterations required to find a solution, i.e. that the respective closed loop system with feedback gain matrix has been stable. One of the ways of computing initial conditions achieved the least number of iterations in about 30% from all generated examples, but on the other hand it has not found solution for almost 20% of the examples. Therefore the problem of initial conditions choice still remains open question and its resolution can improve many present robust controller synthesis methods that use LMI approach.