

# Problémy a riešenia robustného riadenia lineárnych systémov

Vojtech Veselý, Lubomír Grman

Cieľom tohto príspevku je oslovit odborníkov, ktorí sa venujú návrhom riadiacich systémov a nastavovaniu parametrov regulátorov, a zoznámiť ich s možnosťami návrhu robustných regulátorov. V príspevku sú uvedené modely reálnych objektov spolu s analýzou a syntézou robustných regulátorov zaručujúce stabilitu a kvalitu riadenia pre predpísané zmeny parametrov reálnych objektov.

## 1. Úvod

Pri návrhu a nastavovaní parametrov regulátora, napr. PID, sa v praxi používajú metódy, ktoré je možné zhrnúť do štyroch skupín:

- experimentálne (pokus-omyl),
- na základe merania kritických hodnôt regulačného obvodu (Ziegler-Nichols apod.),
- analytické metódy (teória automatického riadenia),
- samonastavujúce systémy (kombinácia teórie automatického riadenia a merania kritických hodnôt),

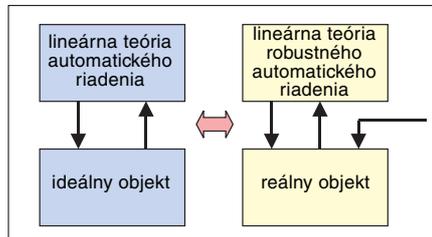
pričom najmenej sa používajú metódy spojené s teóriou automatického riadenia. Preto veľmi často vzniká otázka: prečo lineárna teória riadenia nedáva dostatočne dobré metódy a postupy pre návrh parametrov PID regulátorov, ktoré by v praxi fungovali podľa požiadaviek projektanta?

Riešiť tento problém je povinnosťou všetkých tých, čo pracujú v oblasti teórie automatického riadenia. Na jednej strane sa ukazuje, že sme schopní pre ideálny objekt (obr. 1) navrhnuť regulátor, ktorý by riešil všetky naše požiadavky, a simulácie tieto výsledky potvrdzujú, na strane druhej, keď tento regulátor uplatníme v praxi, kvalita uzavretého regulačného obvodu pre reálny objekt môže byť veľmi vzdialená od očakávaných výsledkov. Kde je problém?

Je potrebné hneď v úvode povedať, že:

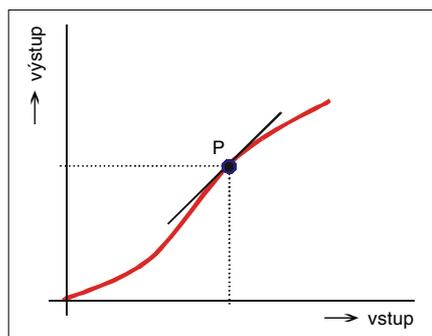
1. rozvoj teórie automatického riadenia je v počiatku,
2. lineárna teória automatického riadenia platí pre idealizovaný prípad, t.j., kde:
  - a) platí princíp superpozície,
  - b) parametre riadeného objektu sú konštantné a známe,
  - c) rád lineárnej diferenciálnej rovnice opisujúcej objekt je známy a nemenný,
  - d) na objekt pôsobí iba výstup z regulátora a žiadne iné signály na nej nemajú vplyv.

Pre reálny objekt vo všeobecnosti neplatia body a) až d), preto ďalším prirodzeným rozvojom lineárnej teórie automatického riadenia je rozpracovanie teórie automatického riadenia, ktorá umožní navrhnuť parametre



Obr. 1. Riadenie ideálneho a reálneho objektu

regulátora, ktoré zabezpečia kvalitné riadenie reálnych procesov. Typickým prípadom, v ktorom neplatí princíp superpozície vo veľkom, je nelineárna – statická charakteristika objektu, ktorá má tvar písmena „S“ a miesto pracovného bodu  $P$  činnosti systému vplyva okrem iného aj na zosilnenie objektu.



Obr. 2. Statická charakteristika tvaru S

Túto sústavu je možné zaradiť z hľadiska statickej charakteristiky buď medzi nelineárne, alebo aj pri dostatočne veľkej zmene vstupnej veličiny medzi lineárne sústavy, kde zosilnenie objektu  $k$  je v zadanom intervale  $[k_{\min}; k_{\max}]$ .

V ďalšom sa budeme venovať objektom, ktoré je možné zaradiť medzi lineárne sústavy. Rád modelu objektu nie je presne známy a parametre objektu sa menia (ľubovoľne rýchlo). Práve týmto objektom sa venuje lineárna teória robustného automatického riadenia reálnych objektov. Zvláštnosťou teórie robustného riadenia dynamických systémov je to, že modelovanie, analýza vlastností objektu, ako aj syntéza regulátorov sa uskutočňuje pomocou neúplného a nepresného matematického modelu riadeného objektu.

## 2. Modely neurčitého systému

Prvým základným problémom teórie robustného riadenia je vytvoriť model neurčitého systému. V zásade je možné doterajšie prístupy tvorby modelov neurčitého systému rozdeliť do troch skupín.

### 2.1 Systémy s neštruktúrovanými neurčitostami

Ak nie je možné určiť konkrétne zmeny jednotlivých koeficientov prenosovej funkcie objektu, tak je možné použiť tzv. neštruktúrovanú neurčitosť. Prenosovú funkciu takéhoto objektu zapisujeme v tvare

$$G(s) = G_0(s) + \delta G(s) \quad (1)$$

kde

$G_0(s)$  je prenos nominálneho modelu objektu,

$s$  Laplaceov operátor,

$\delta G_0(s)$  neznáma prenosová funkcia, ktorej modul je ohraničený, t.j.

$$|\delta G(s)|_{s=j\omega} \leq l_a(\omega)$$

$$\forall \omega \quad l_a(\omega) > 0$$

$l_a(\omega)$  kladná funkcia

$$l_a(\omega) = \max_k |G_0(j\omega) - G_k(j\omega)|$$

$$k = 1; 2; \dots; N$$

$\omega$  uhlová rýchlosť,

$G_k(s)$  prenosové funkcie, ktoré sú výsledkom identifikácie objektu v  $N$  rôznych pracovných bodoch.

Vyberme prenosovú funkciu tak, aby platila nerovnosť

$$|w_a(s)\Delta_a(s)| \geq l_a(\omega) \quad (2)$$

kde

$w_a(s)$  je skalárna prenosová funkcia normalizujúca neurčitosť tak, aby prenosová funkcia neštruktúrovanej neurčitosti  $\Delta_a(s)$  mala modul menší ako jedna.

Ak platí nerovnosť (2), potom dostaneme takzvaný aditívny model neurčitosti

$$G(s) = G_0(s) + w_a(s)\Delta_a(s) \quad (3)$$

$$\forall \omega \quad |\Delta_a(s)| \leq 1$$

Pre multiplikatívny model neurčitosti platí

$$G(s) = G_0(s)(1 + w_i(s)\Delta_i(s)) \quad (4)$$

$$\forall \omega \quad |\Delta_i(s)| \leq 1$$

kde

$$\forall \omega \quad |w_i(s)\Delta_i(s)| = \frac{|w_a(s)\Delta_a(s)|}{|G_0(s)|} \quad (5)$$

a  $\delta G(s)$ ,  $w_a(s)$ ,  $\Delta_i(s)$ ,  $w_i(s)$  a  $\Delta_i(s)$  sú stabilné prenosové funkcie, ktoré charakterizujú veľkosť parametrickej, eventuálne dynamickej neurčitosti. V tomto prípade nepoznáme prenosovú funkciu  $\delta G(s)$ , ale len veľkosť jej normy  $l_a(\omega)$ , a preto hovoríme o neurčitosti, ktorá nie je štruktúrovaná.

### 2.2 Intervalové systémy

Intervalové systémy sú také systémy, ktorých koeficienty prenosovej funkcie objektu sa menia nezávisle od seba a v zadanom intervale. Prenosová funkcia intervalového systému má tvar

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)}$$

$$P_1(s) = p_{0,1} + p_{1,1}s + p_{2,1}s^2 \dots + p_{m,1}s^m$$

$$P_2(s) = p_{0,2} + p_{1,2}s + p_{2,2}s^2 \dots + p_{n-1,2}s^{n-1} + s^n \quad (6)$$

kde

$P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  sú intervalové polynómy čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie  $G(s)$ ,

$p_{i,1}$  intervalové koeficienty polynómu  $P_1(s)$ ,

$p_{j,2}$  intervalové koeficienty polynómu  $P_2(s)$

$$p_{i,1} \in [p_{i,1min}; p_{i,1max}] \quad i = 0; 1; 2 \dots m$$

$$p_{j,2} \in [p_{j,2min}; p_{j,2max}] \quad j = 0; 1; 2 \dots n-1$$

$p_{i,1min}$ ,  $p_{i,1max}$ ,  $p_{j,2min}$  a  $p_{j,2max}$  sú dolné a horné ohraničenia zmien koeficientov prenosovej funkcie objektu  $G(s)$ .

Prenosová funkcia regulátora má všeobecný tvar

$$R(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} \quad (7)$$

kde

$F_1(s)$ ,  $F_2(s)$  sú polynómy s konštantnými koeficientmi čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie regulátora  $R(s)$ .

Vo všeobecnosti je možno charakteristickú rovnicu uzavretého regulačného obvodu pre prípad intervalových polynómov zapísať v tvare

$$A(s) = \sum_{i=1}^p F_i(s)P_i(s) = a_0 + a_1s \dots + a_ns^n \quad (8)$$

kde

$P_i(s)$  sú intervalové polynómy,

$F_i(s)$  polynómy s konštantnými koeficientmi.

V prípade (6) a (7) koeficient  $p$  v (8)  $p = 2$ .

Ak zmeny koeficientov rovnice (8)  $a_i$ ,  $i = 0; 1 \dots n$  sú nezávislé, tak analýzu stability s nutnou a postačujúcou podmienkou môžeme vykonať pomocou štyroch Charitonovových charakteristických rovníc [4]. Ak sú koeficienty závislé, tak sa podmienka stability stanovená

pomocou Charitonovových charakteristických rovníc redukuje na postačujúcu. Výrazným prínosom v analýze stability týchto systémov je takzvaná zovšeobecnená Charitonovova veta [2].

### 2.3 Afinne systémy

Ak časť koeficientov v prenosovej funkcii objektu sa mení spolu, tak je výhodnejšie použiť afinný opis systému s prenosovou funkciou

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)}$$

$$P_1(s) = P_{0,1}(s) + \sum_{i=1}^n P_{i,1}(s)q_i \quad (9)$$

$$P_2(s) = P_{0,2}(s) + \sum_{i=1}^n P_{i,2}(s)q_i$$

kde

$P_{0,1}(s)$ ,  $P_{0,2}(s)$  sú nominálne polynómy s konštantnými koeficientmi,

$P_{i,1}(s)$ ,  $P_{i,2}(s)$  polynómy s konštantnými koeficientmi,  $i = 0; 1; 2 \dots p$

$q_i$  neurčité koeficienty

$$q_i \in [q_{imin}; q_{imax}]$$

$$i = 1; 2 \dots p$$

Keď necháme meniť koeficienty  $q_i = q_{imin}$  alebo  $q_i = q_{imax}$ , vo všeobecnosti je možné získať  $2^p$  prenosových funkcií objektu s konštantnými koeficientmi. Tieto prenosové funkcie je možné "umiestniť" do vrcholu  $p$ -rozmerného kvádra neurčitostí, a preto prenosová funkcia (9) opisuje tzv. polytopické systémy.

Na analýzu stability systému typu (9) sa najčastejšie používajú zovšeobecnená Charitonovova veta a veta o stabilite na hrane kvádra neurčitostí (*edge theorem*) [1].

### 2.4 Multilineárne systémy

V praxi sa často stretávame s tým, že objekt riadenia patrí do triedy multilineárnych systémov

$$G(s) = \frac{P_{11}(s)P_{12}(s) \dots P_{1p}(s)}{P_{21}(s)P_{22}(s) \dots P_{2p}(s)} \quad (10)$$

kde zlomky

$$\frac{P_{i1}(s)}{P_{2i}(s)}$$

$$i = 1; 2 \dots p$$

predstavujú intervalové alebo afinné systémy.

Multilineárny systém môžeme dostať napr. aj v prípade, keď regulovaný objekt má premenlivé dopravné oneskorenie

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} e^{-\tau s}$$

$$\tau \in [\tau_{min}; \tau_{max}] \quad (11)$$

kde

$\tau$  je meniace sa dopravné oneskorenie.

Keď nahradíme člen  $e^{-\tau s}$  Padeho rozvojom prvého rádu

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s} \quad (12)$$

je z prenosovej funkcie (11) a (12) vidno, že obdržíme multilineárny systém.

Je len samozrejme, že v praxi sa používajú rôzne modifikácie modelov opisujúcich neurčité systémy, napr. v časovej oblasti je možné stretnúť rôzne prístupy. Napríklad pre systém

$$\dot{x} = (A + \delta A)x + (B + \delta B)u$$

$$y = Cx \quad (13)$$

kde

$A$ ,  $B$  sú matice systému so známymi a konštantnými koeficientmi,

$\delta A$ ,  $\delta B$  matice neurčitostí s neznámymi koeficientmi, ale s ohraničenou normou,

$x$  vektor stavových veličín,

$u$  vektor vstupných veličín,

$y$  vektor výstupných veličín

máme modifikácie uvedené v kap. 2.4.1 až 2.4.5.

#### 2.4.1 Ohraničenie neurčitostí normou

$$\|\delta A\| \leq q_a \geq 0$$

kde

$\|\delta A\|$  je ľubovoľná norma matice neurčitostí,  $q_a$  nezáporná konštanta.

#### 2.4.2 Ohraničenie podľa prvkov

$$|\delta A| \leq A_m$$

$${}^m a_{ij} \geq |\delta a_{ij}|$$

kde

$|\delta A|$  je modul matice neurčitostí (tj. absolútne hodnoty jednotlivých prvkov),

${}^m a_{ij}$  prvky matice  $A_m$ .

#### 2.4.3 Afinný typ neurčitostí

$$\delta A = \sum_{i=1}^p A_i q_i$$

$$q_i \in [q_{imin}; q_{imax}]$$

#### 2.4.4 Maticové ohraničenie

$$\delta A^T \delta A \leq \gamma_a Q_a$$

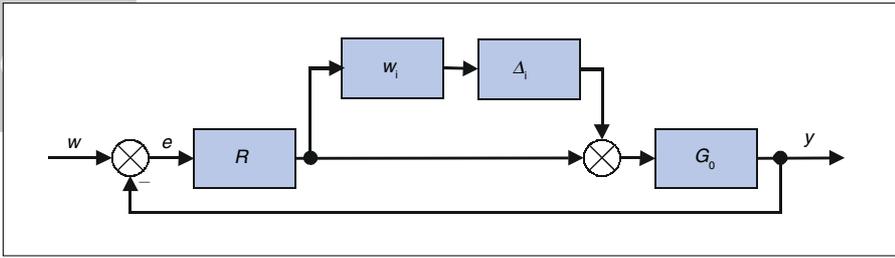
$$\gamma_a \geq 0$$

$$Q_a > 0$$

kde

$\gamma_a$  je nezáporná zhora ohraničená konštanta,

$Q_a$  známa kladne definitná matica.



Obr. 3. Regulačný obvod s multiplikatívnym modelom neurčitosti

Obdobne platia podmienky ohraničenia aj pre maticu  $\delta B$ .

2.4.5. Podmienky zosúladenia vstupnej a systémovej neurčitosti

$\delta A = UWA_1$

$\delta B = UWA_2$

kde

$U, A_1, A_2$  sú známe matice,

$W$  matica neurčitosti, ktorá vyhovuje podmienke  $W^T W \leq I$ .

Problémom je výber modelu neurčitosti pre reálny objekt a jeho identifikácia tak, aby výsledky analýzy a syntézy regulátorov boli čo najmenej konzervatívne. Inými slovami povedané, ak vyberieme nevhodný model neurčitosti (neurčitosť v modeli je väčšia ako neurčitosť reálnej sústavy) môže sa stať, že pri návrhu robustného regulátora neobdržime také parametre, ktoré by zaručovali robustnú stabilitu daného procesu, hoci v skutočnosti takéto parametre regulátora existujú.

Z doterajších výsledkov vyplýva, že najmenej konzervatívne výsledky dáva afinný model neurčitosti, ktorý umožňuje zahrnúť v sebe reálne zmeny fyzikálnych parametrov objektu.

3. Analýza a syntéza robustných regulátorov pre systém SISO

3.1 Systémy s neštruktúrovanými neurčitosťami

Pre analýzu robustnej stability systému SISO (systému s jedným vstupom a jedným výstupom) zoberme model s multiplikatívnou neurčitosťou (obr. 3).

Prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu je

$L = G_0(1 + w_i \Delta_i)R = L_0 + L_0 w_i \Delta_i$  (14)

kde

$G_0$  je prenos nominálneho modelu objektu,

$w_i$  skalárna prenosová funkcia normalizujúca neurčitosť,

$\Delta_i$  stabilná prenosová funkcia, pre ktorú platí

$\forall \omega \quad |\Delta_i(j\omega)| \leq 1$

$L_0 = G_0 R$  je prenosová funkcia regulačného obvodu (prenos objektu a prenosové funkcie  $w_i$  a  $\Delta_i$  boli definované v kap. 2.1).

Nyquistova krivka  $L_0(j\omega)$  je na obr. 4.

Označme polomery kružníc

$r_1 = |w_i(j\omega_1)L_0(j\omega)|$

ktorý charakterizuje veľkosť neurčitosti, a

$r_2 = |w_p(j\omega)|$

ktorý určuje požiadavku na kvalitu regulácie. Prenosová funkcia  $w_p(s)$  v (15) definuje okolo bodu  $(-1; j0)$  oblasť, do ktorej frekvenčná charakteristika otvoreného regulačného obvodu (bez neurčitosti)  $L_0(j\omega)$  nesmie vojsť. Vhodným výberom  $w_p(s)$  je možné zadať napr. požadovanú amplitúdovú (fázovú) bezpečnosť regulačného obvodu.

Nutnou a postačujúcou podmienkou zabezpečenia robustnosti a kvality regulácie systému je splnenie nerovnosti

$r_1 + r_2 < d_1$

kde

$d_1 = |(-1 + j0) - L_0(j\omega_1)| = |1 + L_0|$

alebo

$\forall \omega \quad |w_i L_0| + |w_p| < |1 + L_0|$  (15)

alebo

$|w_p S_0| + |w_i T_0| < 1$

kde

$S_0 = \frac{1}{1 + L_0}$

$T_0 = \frac{L_0}{1 + L_0}$

Syntézu robustného regulátora je potrebné uskutočniť tak, aby platila nerovnosť (15).

Možné riešenie syntézy robustného regulátora je napr. použiť nasledovný postup:

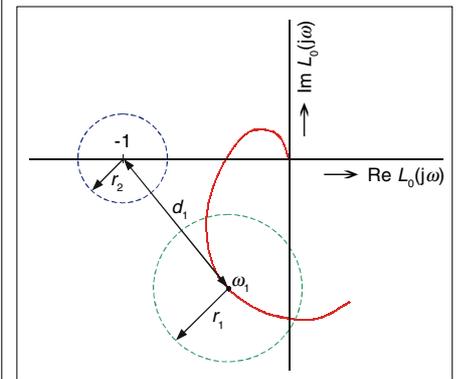
a) Ak  $|L_0| \gg 1$ ,  $\omega$  je malé, vtedy spravidla platí  $|w_i| < 1$

Úpravou rovnice (15) dostaneme

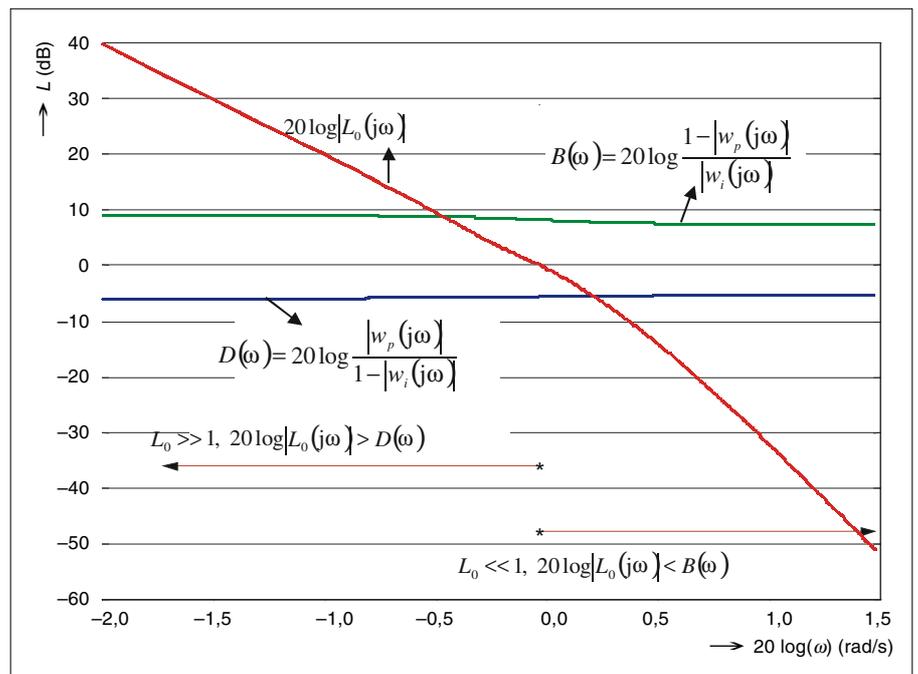
$|w_i L_0| + |w_p| < |L_0| \Rightarrow |L_0| > \frac{|w_p|}{1 - |w_i|}$  (16)

b) Ak  $|L_0| \ll 1$ ,  $w$  je veľké a pre rovniciu (15) dostaneme

$|L_0| < \frac{1 - |w_p|}{|w_i|}$  (17)



Obr. 4. Nyquistova krivka



Obr. 5. Grafická interpretácia nerovnice (16) a (17)

Využitím nerovnic (16), (17) a Bodeho diagramu je možné sformulovať požiadavky na priebeh frekvenčnej charakteristiky otvoreného regulačného obvodu  $L_0$  tak, aby systém zabezpečil požadovanú robustnú stabilitu a kvalitu regulácie.

**Príklad 1:**

$$G(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

$k \in [2; 3]$

$$w_i(s) = \frac{T_1 s + a}{T_2 s + 1}$$

$$w_p(s) = \frac{T_3 s + b}{T_4 s + 1}$$

$$R(s) = \frac{r_1 s^2 + r_0 s + r_{-1}}{s}$$

kde

$G(s)$  je prenosová funkcia objektu,  
 $k$  zosilnenie objektu  $G(s)$  meniace sa v danom intervale,

$w_i(s), w_p(s)$  sú dané prenosové funkcie,

$T_1$  časová konštanta,  $T_1 = 0,25$  s,

$T_2$  časová konštanta,  $T_2 = 1,00$  s,

$T_3$  časová konštanta,  $T_3 = 0,41$  s,

$T_4$  časová konštanta,  $T_4 = 1,00$  s

$a, b$  konštanty,  $a = 0,21, b = 0,4$

$R(s)$  prenosová funkcia regulátora,

$r_0$  koeficient zosilnenia proporčnej zložky,  $r_0 = 0,6$

$r_{-1}$  koeficient zosilnenia integračnej zložky,  $r_{-1} = 0,4$

$r_1$  koeficient zosilnenia derivačnej zložky,  $r_1 = 1$

Grafická interpretácia nerovnice (16) a (17) je na obr. 5.

Nerovnica (15) je splnená a systém s navrhnutým PID regulátorom zabezpečuje robustnú stabilitu uzavretého regulačného obvodu.

Dôležitou úlohou pri syntéze robustného regulátora je výber prenosovej funkcie  $w_p(s)$  tak, aby sa dosiahla požadovaná kvalita regulácie. Tu je potrebné nájsť prepojenie medzi kvalitou regulácie a výberom konkrétnej prenosovej funkcie  $w_p(s)$ .

**3.2 Intervalové systémy**

Nech prenosová funkcia objektu je v tvare (6) a prenosová funkcia regulátora má všeobecný tvar (7). Charakteristická rovnica uzavretého regulačného obvodu je (8) a  $p = 2$  – pozri kap. 2.2.

Za predpokladov, že:

- každý prvok  $p_{j,i}$  sa mení nezávisle,
  - stupeň polynómu  $A(s)$  sa nemení,
- je možné analýzu stability uskutočniť takto:

a) Ak regulátor  $R(s)$  je typu P, I alebo D, potom všetky prvky v  $A(s)$  sa menia nezávisle od seba a k analýze stability  $A(s)$  intervalového polynómu je možné použiť Charitonovovu vetu. Podľa Charitonovovej

vety, ak charakteristická rovnica uzavretého regulačného obvodu

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \dots + a_n s^n$$

$$a_i \in [a_{i, \min}; a_{i, \max}]$$

$$i = 0; 1 \dots n$$
(18)

potom nutnou a postačujúcou podmienkou stability  $A(s)$  je, aby štyri Charitonovove polynómy (19) boli stabilné [4]

$${}^1K(s) = a_{0, \max} + a_{1, \min} s + a_{2, \min} s^2 \dots \quad (+ -)$$

$${}^2K(s) = a_{0, \max} + a_{1, \max} s + a_{2, \min} s^2 \dots \quad (+ +)$$

$${}^3K(s) = a_{0, \min} + a_{1, \max} s + a_{2, \max} s^2 \dots \quad (- +)$$

$${}^4K(s) = a_{0, \min} + a_{1, \min} s + a_{2, \max} s^2 \dots \quad (- -)$$
(19)

b) Ak polynómy  $F_1(s)$ , popr.  $F_2(s)$  sú stupňa väčšieho ako jedna a s konštantnými koeficientmi, potom prvky  $A(s)$  môžu byť na seba závislé a analýzu stability je potrebné uskutočniť využitím hraničnej charakteristickej rovnice alebo hraničnej prenosovej funkcie. Hraničná charakteristická rovnica určuje s nutnou a postačujúcou podmienkou stabilitu uzavretého regulačného obvodu s neurčitým objektom.

Pre charakteristickú rovnicu (8) je možné hraničnú charakteristickú rovnicu vypočítať nasledovne:

Definujeme pre  $l = 1; 2$  rodinu hraničných charakteristických rovníc takto

$${}^1\Delta_E(s) = F_1 \Sigma_1 + F_2 \Gamma_2$$

$${}^2\Delta_E(s) = F_1 \Gamma_1 + F_2 \Sigma_2$$
(20)

kde

$$\Gamma_l(s) = \{ {}^1K_l(s); {}^2K_l(s); {}^3K_l(s); {}^4K_l(s) \}$$

${}^iK_p, i = 1; 2; 3; 4$  predstavuje  $i$ -ty Charitonovov polynóm  $l$ -tého intervalového polynómu  $P_l(s)$ ,

$$\Sigma_l(s) = \left\{ \left[ {}^1K_l; {}^2K_l \right]; \left[ {}^1K_l; {}^3K_l \right]; \left[ {}^2K_l; {}^4K_l \right]; \left[ {}^3K_l; {}^4K_l \right] \right\}$$

predstavuje štyri Charitonovove segmenty polynómu  $P_l(s)$ .

Pripomeňme, že segment má tvar napr.

$$\left[ {}^1K_l; {}^2K_l \right] = (1 - \lambda) {}^1K_l + \lambda {}^2K_l$$

Množina hraničných charakteristických rovníc je

$$\Delta_E(s) = \bigcup_{i=1}^2 \Delta_E^i(s)$$
(21)

Charakteristická rovnica (18) je podľa zo všeobecnej Charitonovovej vety stabilná

vtedy a len vtedy, ak množina hraničných charakteristických rovníc bude stabilnou. Pre náš konkrétny prípad z (21) možno obdržať hraničnú prenosovú funkciu intervalového objektu v tvare

$$G_E(s) = \left\{ \frac{{}^i K_1(s)}{\lambda {}^j K_2(s) + (1 - \lambda) {}^k K_2(s)} \cup \bigcup \frac{\lambda {}^j K_1(s) + (1 - \lambda) {}^k K_1(s)}{{}^i K_2(s)} \right\}$$
(22)

$$i \in \{1; 2; 3; 4\}$$

$$(j; k) \in \{(1; 2); (1; 3); (2; 4); (3; 4)\}$$

$$\lambda \in [0; 1]$$

Počet  $G_E(s)$  je určený štyrmi Charitonovovými polynómami a štyrmi Charitonovovými segmentmi, ktoré dávajú spolu 32 hraničných prenosových funkcií (16 + 16). Každá hraničná prenosová funkcia obsahuje parameter  $\lambda$ , preto analýzu stability uzavretého regulačného obvodu možno uskutočniť tak, že sa vytvorí 32 segmentov s charakteristickými rovnicami

$${}^1A_j(s) = A_j(s)|_{\lambda=0}$$

$${}^2A_j(s) = A_j(s)|_{\lambda=1}$$

a overuje sa stabilita 32 segmentov [2]. Vzhľadom na spojitost zmeny parametrov je možné interval  $\lambda$  rozdeliť na 5 až 10 častí a vypočítať konkrétne parametre príslušnej hraničnej prenosovej funkcie. V prípade, ak krok  $\lambda$  je 0,1, počet hraničných prenosových funkcií je 352.

c) Ak polynómy  $F_1(s), F_2(s)$  sú v špeciálnom tvare (PI regulátor patrí do tejto triedy prenosových funkcií)

$$F_i(s) = s^{t_i} (a_i s + b_i) U_i(s) Q_i(s)$$
(23)

kde

$t_i$  je ľubovoľné celé nezáporné číslo,  
 $a_i, b_i$  sú ľubovoľné reálne čísla,  
 $U_i(s)$  je nestabilný Hurwitzov polynóm,  
 $Q_i(s)$  párnny alebo nepárnny polynóm, ó m  
 tak podľa [2] hraničná prenosová funkcia (22) sa redukuje na Charitonovovu prenosovú funkciu

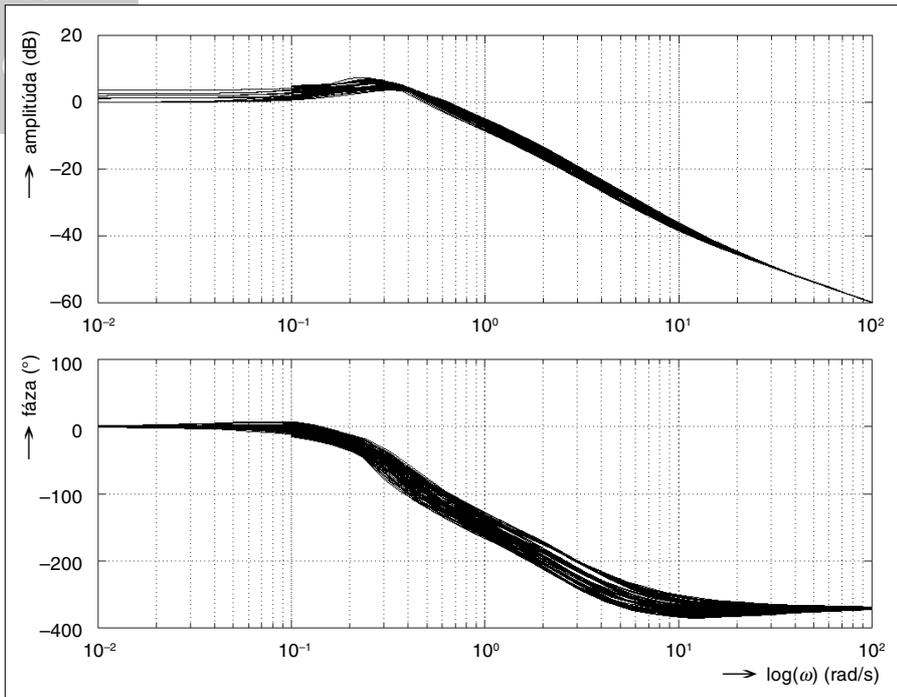
$$G_K(s) = \frac{{}^i K_1(s)}{{}^j K_2(s)}$$
(24)

$$i; j = 1; 2; 3; 4$$

pre ktorú regulátor  $R(s)$  zabezpečuje stabilitu s nutnou a postačujúcou podmienkou. Celkový počet Charitonovových prenosových funkcií je 16.

**3.3 Multilineárne systémy**

Pre štvrtý typ modelu (10), keď sa jedná o multilineárny systém, uvedieme príklad, v ktorom je prenosová funkcia objektu zložená



Obr. 6. Logaritmicke-frekvenčne charakteristiky objektu

z afinného modelu (9) a premenlivého dopravného oneskorenia (11). Hraničná prenosová funkcia pre multilineárny systém je odvodená v [3].

**Príklad 2:**

Uvažujme prenosovú funkciu tepelnej sústavy s premenlivým dopravným oneskorením [8]

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} e^{-s\tau}$$

$$P_1(s) = 0,1s^2 + s + 0,4 + q_1(0,1s + 0,2) + q_2(0,2s + 0,1)$$

$$P_2(s) = s^3 + 2,5s^2 + s + 0,3 + q_1(0,4s^2 + 0,3s + 0,1) + q_2(0,2s^2 + 0,3s + 0,1)$$

$$i = 1; 2 \quad q_i \in [-1; 1]$$

$$\tau \in [0,5; 1]$$

kde  $q_i$  sú neurčité koeficienty,  $\tau$  je premenné dopravné oneskorenie. Po rozložení  $e^{-s\tau}$  do Padeho rozvoja ide o multilineárny systém.

Bodeho diagram neurčitého objektu reprezentovaný hraničnými prenosmi je na obr. 6.

Parametre prenosovej funkcie PI regulátora

$$R(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = 0,8 \left( 1 + \frac{1}{20s} \right)$$

kde  $K$  je zosilnenie proporcionálnej zložky [-],  $T_i$  integračná časová konštanta (s) boli vybraté tak, aby fázová bezpečnosť bola lepšia ako 40°. V našom prípade sa pohybu-

je v rozsahu  $\Delta\varphi \in [43; 70]^\circ$ , čo potvrdzuje obr. 7.

Bodeho diagram pre prípad zmeny dopravného oneskorenia v intervale  $\tau \in [0,5; 1,8]$  je na obr. 8. Fázová bezpečnosť s navrhnutým PI regulátorom sa znížila na hodnotu  $\Delta\varphi \in [27; 55]^\circ$ .

**4. Syntéza robustných regulátorov pre systém MIMO**

Pre systém s viac vstupmi a výstupmi (MIMO) sformulujeme problém návrhu ro-

bustného regulátora pri spätnej väzbe od výstupnej veličiny.

V spojitosti s návrhom robustných regulátorov pre lineárny spojité časovo-invariantný systém sa používa model opísaný rovnicou (13). Definujeme afinne typy neurčitosti podľa kap. 2.4.3. Statická spätná väzba od vektora výstupnej veličiny sa realizuje podľa algoritmu riadenia:

$$u = KCx \tag{25}$$

kde

$K$  je matica spätoväzbového zosilnenia od výstupnej veličiny.

Model uzavretého regulačného obvodu

$$\dot{x} = \left[ A + \sum_{i=1}^p A_i q_i + \left( B + \sum_{i=1}^p B_i q_i \right) \right] KCx \tag{26}$$

pri prestriedaní všetkých hodnôt  $q_i = q_{i\max}$  alebo  $q_{i\min}$ ,  $i = 1; 2 \dots m$  vytvorí polytop s počtom vrcholov  $N = 2^p$ . V každom vrchole polytopu je umiestnený systém

$$\dot{x} = A_{ci} x$$

$$i = 1; 2 \dots N$$

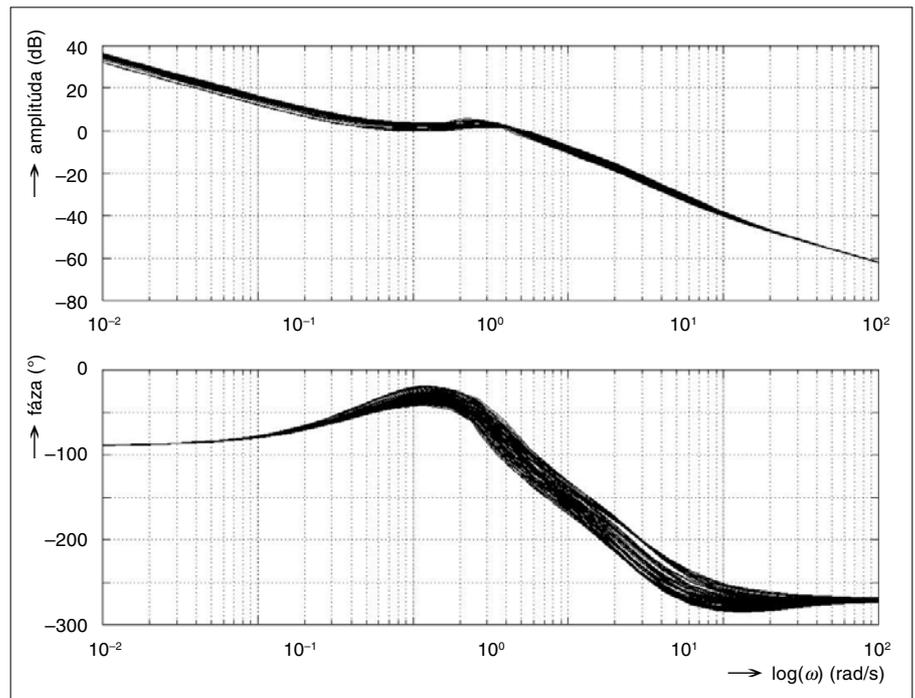
príčom pre maticu  $A_{ci}$  platí

$$A_{ci} = A_{vi} + B_{vi} KC$$

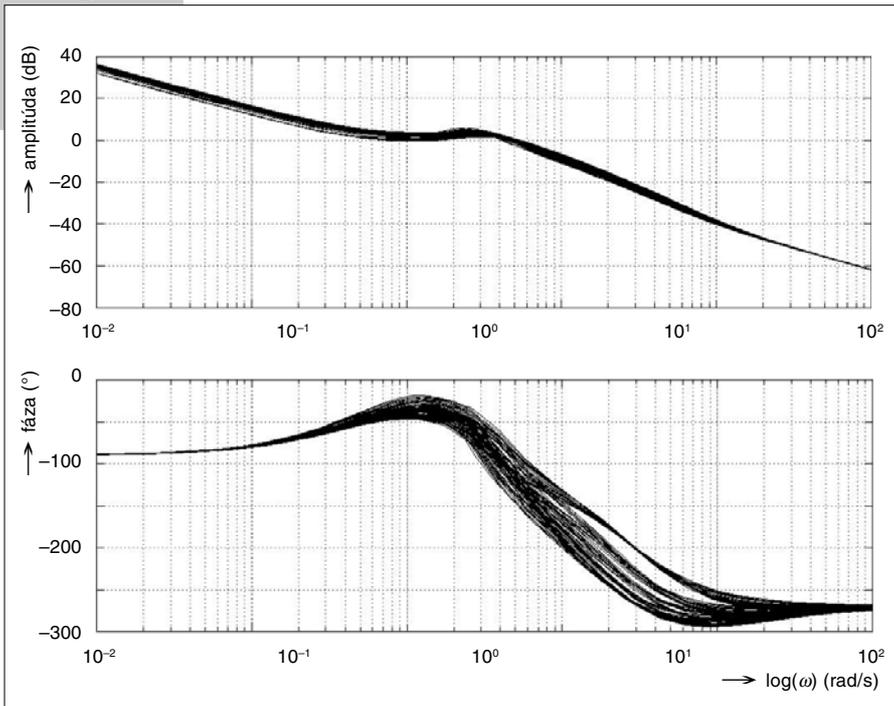
kde

$A_{vi}, B_{vi}$  sú matice systému umiestnené vo vrchole kvádra neurčitosti.

Konvexná obálka opisujúca polytopický systém na hrane  $p$ -rozmerného kvádra neurčitosti je



Obr. 7. Logaritmicke-frekvenčne charakteristiky objektu s dopravným oneskorením  $\tau \in [0,5; 1]$



Obr. 8. Logaritmicko-frekvenčné charakteristiky objektu s dopravným oneskorením  $\tau \in [0,5; 1,8]$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{ci} x \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i &= 1 \\ \alpha_i &\in [0; 1] \end{aligned} \quad (27)$$

Polytopický systém (27) je kvadraticky stabilný vtedy a len vtedy, ak existuje kladne definitná symetrická matica  $P$  ( $P = P^T > 0$ ), ktorá vyhovuje nasledovnej maticovej nerovnici

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{ci} x \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i &= 1 \\ \alpha_i &\in [0; 1] \end{aligned} \quad (28)$$

Kvadratická stabilita je spojená s Ljapunovou funkciou. Pre prípad  $N = 1$  určuje nutnú a postačujúcu podmienku stability systému. Pre  $N > 1$  kvadratická stabilita znamená splnenie len postačujúcich podmienok stability, lebo zabezpečuje stabilitu aj pre veľmi rýchle zmeny neznámych parametrov  $q_i$ , preto kvadratická stabilita dáva konzervatívne výsledky. Pre zmiernenie konzervatizmu kvadratickej stability sa používa Ljapunovova funkcia v tvare

$$P(q) = P_0 + q_1 P_1 \dots + q_p P_p > 0 \quad (29)$$

a rieši sa úloha afinnej kvadratickej stability [6].

V krátkosti ukážeme na postup syntézy robustných regulátorov pre mnohorozmerné systémy (MIMO), ktorá zabezpečí garantovanú kvalitu regulácie a kvadratickú stabilitu pre polytopický systém.

Na základe nutných a postačujúcich podmienok stabilizovateľnosti systému pomocou výstupnej veličiny [5] s garantovanou kvalitou regulácie pre polytopický systém je možné zapísať nerovnosť

$$\begin{aligned} (A_{vi} + B_{vi} KC)^T P + P(A_{vi} + B_{vi} KC) + \\ + Q + C^T K^T R K C \leq 0 \\ i = 1; 2 \dots N \end{aligned} \quad (30)$$

Ak existuje kladne definitná symetrická matica  $P$  a matica zosilnenia  $K$ , ktorá pre všetky  $i = 1; 2 \dots N$  vyhovuje podmienke (30), potom polytopický systém je kvadraticky stabilný a regulátor zabezpečuje minimálnu hodnotu kritériálnej funkcie

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (31)$$

Maticová nerovnica (30) je bilineárna vzhľadom na hľadané  $P$  a  $K$ , preto k riešeniu neznámych matic v tvare (30) je možné použiť buď iteračnú metódu LMI (Linear Matrix Inequality – toolbox Matlab) alebo BMI (Bilinear Matrix Inequality) alebo vhodným spôsobom úlohu BMI s nutnou a postačujúcou podmienkou previesť na úlohu LMI. Na základe postačujúcich podmienok stability sú vypracované postupy

riešenia systému nerovnic (30) bez použitia iteračných metód [7].

## 5. Záver

Cieľom tohoto príspevku je informovať inžiniersku verejnosť o možnostiach uplatnenia lineárnej teórie robustného automatického riadenia v reálnej praxi. Doterajšie praktické skúsenosti a dosiahnuté teoretické výsledky ukazujú na nové možnosti návrhu regulátorov, ktoré v praxi zabezpečia požadované robustné vlastnosti regulačného obvodu a dobrú kvalitu regulácie pri zmenách parametrov reálnych objektov.

## Literatúra:

- [1] BARTLETT, A. C. – HOLLOT, C. V. – LIN, H.: *Root Location of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges*. Mathematics of Control, Signals and Systems, vol. 1, 1988.
- [2] BHATTACHARYYA, S. P. – CHAPPELLAT, H. – KEEL, L. H.: *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1995.
- [3] GRMAN, L. – HYPIUSOVÁ, M. – VESELÝ, V.: *Robust controller design for multilinear interval uncertainty*. 5<sup>th</sup> International Scientific-technical Conference Process Control. Kouty nad Desnou, Czech Republic: June 9-12, 2002.
- [4] KHARITONOV, V. L.: *Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations*. Differential Equations, vol. 14, 1979, pp. 1483-1485.
- [5] KUČERA, V. – DE SOUZA, C. E.: *A Necessary and Sufficient Conditions for Output Feedback Stabilizability*. Automatica 31, No. 9, 1995, pp. 1357-1359.
- [6] VESELÝ, V.: *Design of Robust Output Affine Quadratic Controller*. 15<sup>th</sup> Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control. Barcelona, Spain, July 21-26, 2002.
- [7] VESELÝ, V.: *Robust Output Feedback Controller Design for Linear Parametric Uncertain Systems*. Journal of Electrical Engineering, vol. 53, No. 5-6, 2002, pp. 117-125.
- [8] VESELÝ, V. – HYPIUSOVÁ, M. – GRMAN, L.: *Nastavovanie parametrov regulátora pre reálne objekty*. AT&P Journal, vol. 1, 2002, str. 67-69.

Tato úloha vznikla za podpory grantu c.: 1/0158/03.

Lektoroval: Ing. Michael Šebek, DrSc., Centrum aplikované kybernetiky, ČVUT Praha

Prof. Ing. Vojtech Veselý, DrSc.,  
a Ing. Lubomír Grman,  
katedra automatizovaných systémov riadenia,  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
STU Bratislava  
(vesely@kasr.elf.stuba.sk;  
grman@kasr.elf.stuba.sk)